

WOJCIECH POKOJSKI  
Uniwersytet Warszawski  
Wydział Geografii i Studiów Regionalnych  
Katedra Geomatyki i Systemów Informacji Przestrzennej  
wpokojski@uw.edu.pl

PAULINA POKOJSKA  
Uniwersytet Warszawski  
Wydział Geografii i Studiów Regionalnych  
ppokojska@uw.edu.pl

## **Diagramy Woronoja – twórca, metoda, zastosowania**

Zarys treści. Autorzy prezentują sylwetkę i prace Georgija Woronoja (1868–1908), twórcy oryginalnej metody diagramów, ucznia sławnego matematyka Andrieja Markowa. Georgij Woronój ukończył Wydział Fizyki i Matematyki Uniwersytetu w Petersburgu, następnie w latach 1894–1908 pracował jako profesor matematyki na Cesarskim Uniwersytecie Warszawskim. Jego studentem był późniejszy wybitny polski matematyk Waław Sierpiński. Podczas swojego krótkiego życia G. Woronój opublikował kilka bardzo ważnych artykułów naukowych dotyczących teorii liczb. W prawie stustronicowej pracy w języku francuskim opublikowanej w 1908 r. opisał metodę diagramów lub poligonów zwaną od jego nazwiska metodą diagramów Woronoja.

### **1. Wstęp**

Diagramy Woronoja są metodą interpolacji danych przestrzennych na wieloboki wokół każdego punktu w taki sposób, aby wszystkie miejsca z otaczającego punkt obszaru znajdowały się bliżej niego niż jakkolwiek inny punkt. Metoda ta opracowana ponad sto lat temu przez profesora Uniwersytetu Warszawskiego i wykorzystywana w wielu dziedzinach nauki na całym świecie, w epoce cyfrowej znajduje nowe zastosowania. W artykule zaprezentowano sylwetkę Georgija Woronoja (1868–1908), dokonano zestawienia oprogramowania GIS wykorzystującego jego metodę i zestawiono przykładowe zastosowania diagramów Woronoja w różnych dziedzinach nauki. Warto bliżej poznać sylwetkę tego wybitnego naukowca w 150 rocznicę urodzin, popularność jego metody w aplikacjach GIS i jej różne zastosowania w badaniach naukowych.

W epoce cyfrowej metoda ta i jej modyfikacje znalazły nowe zastosowania. Hasło „Woronój” jest coraz bardziej popularne w Internecie, a metoda diagramów Woronoja i jej modyfikacje są szeroko opisywane w podręcznikach i artykułach naukowych. Autorzy artykułu prezentują zastosowanie metody w najbardziej popularnych programach komputerowych z grupy Geographic Information Systems (GIS) oraz podają przykłady jej wykorzystania w badaniach przestrzeni geograficznej w różnych dziedzinach nauki.

Słowa kluczowe: diagramy Woronoja, Georgij Woronój, GIS, Uniwersytet Warszawski

### **2. Georgij Woronój**

#### **2.1. Dzieciństwo i młodość na Ukrainie**

Georgij Woronój urodził się 16 kwietnia 1868 roku w mieście Żurawka w ówczesnej guberni połtańskiej. Pochodził z rodziny ukraińskiej, ale posługiwał się rosyjską formą nazwiska Woronój, a nie ukraińską Woronij (H. Syta 2010, A. Schinzel 2016). Jego ojciec Teodozjij Woronój (1837–1910), był filologiem rosyjskim, nauczycielem w szkołach średnich, inicjatorem i założycielem kilku szkół, w tym szkół dla pracujących (H. Syta 2001).

Georgij ukończył 5-klasową szkołę w Berdiańsku, następnie w roku 1885 gimnazjum w Prylukach. Duży wpływ na jego zainteresowanie nauką wywarł nauczyciel matematyki Iwan Bogosłowski (H. Syta 2010), który zachęcił go do publikowania. Woronój w wieku

17 lat, będąc jeszcze uczniem gimnazjum, opublikował artykuł naukowy dotyczący dekompozycji wielomianów w jednym z czasopism



Ryc. 1. Geоргий Вороной (1868–1908)

matematycznych pt. „Журнал Элементарной Математики”, wydawanych na Uniwersytecie Kirowskim (H. Syta 2010, A. Schinzel 2016).

## 2.2. Studia w Petersburgu

W 1885 roku, tuż po ukończeniu gimnazjum G. Woronoj podjął studia na Wydziale Fizyki i Matematyki Uniwersytetu w Petersburgu. Głównym obszarem jego zainteresowań była teoria liczb; jeszcze jako student napisał pracę o liczbach Bernoulliego, którą przedstawił w 1889 roku jako rozprawę kandydacką. Jego opiekunem naukowym był słynny matematyk Andriej Markow (A. Schinzel 2016), twórca metody badań doświadczeń zależnych, zwanych obecnie łańcuchem Markowa. Badania te dały początek rozwojowi nowoczesnego rachunku prawdopodobieństwa – teorii procesów stochastycznych Markowa (*Biografia Markow*). Po otrzymaniu tytułu kandydata i ukończeniu studiów Woronoj był nauczycielem matematyki w progimnazjum w Peterhofie (A. Schinzel 2016); równolegle przygotowywał pracę magisterską (rosyjski odpowiednik rozprawy doktorskiej) dotyczącą liczb całkowitych, którą ukończył w 1894 roku (*MacTutor History of Mathematics*).

## 2.3. Praca na Uniwersytecie Warszawskim

W 1894 roku, po otrzymaniu tytułu magistra, Woronoj w wieku 26 lat został skierowany do pracy na Cesarskim Uniwersytecie Warszawskim. Początkowo otrzymał etat docenta, a następnie profesora nadzwyczajnego (R. Duda 2016), wykładał m.in. geometrię analityczną, rachunek różniczkowy i całkowy oraz opracował podręczniki do tych przedmiotów (A. Schinzel 2016). Równolegle prowadził intensywne badania naukowe, pracował nad rozprawą dokorską, którą obronił w Petersburgu w 1897 roku. W 1898 roku został wybrany na członka Moskiewskiego Towarzystwa Matematycznego, a w latach 1899 i 1901 brał udział w kongresach rosyjskich przyrodników i lekarzy. W 1904 roku na międzynarodowym kongresie matematyki w Heidelbergu wygłosił dwa referaty. Za działalność naukową w 1907 r. został mianowany członkiem korespondentem Petersburskiej Akademii Nauk.

G. Woronoj miał duży wkład w rozwój polskiej szkoły matematyki. Jego studentem na Uniwersytecie Warszawskim był późniejszy słynny polski matematyk Waclaw Sierpiński. Woronoj zlecił mu rozwiązanie zagadnienia z teorii liczb. Za znakomite wywiązanie się z powierzonego zadania W. Sierpiński otrzymał medal, a następnie rozwinął ten sam temat w rozprawie kandydackiej (J. Hurwic 2016). Pierwsze prace W. Sierpińskiego, w tym rozprawa doktorska i habilitacyjna, powstały również pod silnym wpływem Woronoja (A. Schinzel 2016).

Należy dodać, że ówczesny Cesarski Uniwersytet Warszawski był dla Imperium rosyjskiego uczelnią peryferyjną, nienastawioną na prowadzenie badań naukowych. Zabronione było używanie języka polskiego, a uczelnia miała wyraźną tendencję rusyfikacyjną (R. Duda 2016). W skład uczelni wchodził m.in. Wydział Fizyczno-Matematyczny, na którym funkcjonowało 11 katedr, w tym prowadzona przez G. Woronoja katedra matematyki (H. Syta 2010). Woronoj, podobnie jak inni naukowcy z jego wydziału, stronił od polityki. Jak pisze J. Schiller-Walicka (2016), część rosyjskich profesorów, szczególnie z Wydziału Medycznego i Matematyczno-fizycznego, starała się wykonywać swoje obowiązki rzetelnie, a wielu profesorów wolało nie zajmować zdecydowanego stanowiska w sprawach politycznych. Poza tym

profesorowie zatrudnieni na etatach uniwersyteckich podejmowali dodatkową pracę dydaktyczną. Na przykład Woronoi objął w 1898 r. katedrę matematyki w Instytucie Politechnicznym im. Cara Mikołaja II (jego działalność kontynuuje Politechnika Warszawska) (J. Miąso 1989, A. Ulmer 2016).

Po rewolucji 1905 roku w Królestwie Polskim, ze względów politycznych władze rosyjskie postanowiły przenieść Uniwersytet Warszawski do jednego z miast w Rosji. G. Woronoi negocjował przeniesienie uniwersytetu do Woroneża (J. Schiller 2005), uczelnia została jednak na lata 1906–1907 przeniesiona do Nowoczerkaska (koło Rostowa nad Donem). Podczas rocznego pobytu w Nowoczerkasku pełnił funkcję dziekana Wydziału Mechanicznego. Niestety, niekorzystne warunki życia w tym mieście spowodowały poważne pogorszenie jego stanu zdrowia (J. Schiller-Walicka 2016).

Jesienią 1908 r. zajęcia na Uniwersytecie Warszawskim zostały wznowione, a G. Woronoi wrócił do Warszawy. Wkrótce potem, 7 listopada 1908 roku zmarł w wieku 40 lat i został pochowany w rodzinnej miejscowości Żurawka na Ukrainie (H. Syta 2010). Wacław Sierpiński pożegnał swojego profesora wygłaszając odczyt na Uniwersytecie Lwowskim. Stwierdził, że „wszystkie prace Woronoja z punktu naukowego odznaczają się najwyższą dokładnością, a z dydaktycznego nadzwyczajną przejrzystością i prostotą wykładu. Był on człowiekiem, któremu nigdy nie brakowało tematów w pracy naukowej. Jak wiadomo, w matematyce chyba najciężej jest znaleźć dla siebie odpowiedni i produktywny temat... Wszystkie jego prace są na wskroś oryginalne i świadczą o jego nadzwyczajnych zdolnościach...” (W. Sierpiński 1908).

### 3. Diagramy Woronoja

#### 3.1. Prace naukowe

Podczas swojego krótkiego życia G. Woronoi zdołał rozpocząć kilka nowych kierunków we współczesnej teorii liczb. Napisał 12 prac naukowych, z których 8 ma znaczenie naukowe do dziś<sup>1</sup>. Swoje odkrycia na temat wielościanów

i teorii liczb Woronoi opublikował w 1907 roku w pracy *Свойства положительных совершенных квадратичных форм* (Właściwości pozytywnych doskonałych form kwadratowych)<sup>2</sup>.

Pierwszą znaną z literatury ideą zastosowania podziału przestrzeni w sposób zbliżony do diagramów Woronoja była metoda wspomniana w 1644 roku przez Kartezjusza, opisująca rozmieszczenie materii we Wszechświecie (R. Descartes 1644). Następnie metodę tę zaprezentował G.L. Dirichlet (1850) i od jego nazwiska metodę nazwano tesselacją Dirichleta (A. Okabe i in. 2009).

Rozwinięcie tej metody G. Woronoi zaproponował w prawie stustronicowej pracy  *Nouvelles applications des paramètres continus à la théorie de formes quadratiques* opublikowanej na łamach „Journal für die Reine und Angewandte Mathematik” (G. Voronoi 1908), najstarszego ciągle wydawanego czasopisma matematycznego. Swoją pracę autor podpisał jako Georges Voronoi a Varsovie; cytował w niej m.in. pracę Dirichleta, którego metodę rozwinął. Po stu latach od wydania papierowej wersji artykułu, opublikowano go on-line w repozytorium [www.degruyter.com](http://www.degruyter.com)<sup>3</sup>.

#### 3.2. Poligony Thiessena czy Woronoja?

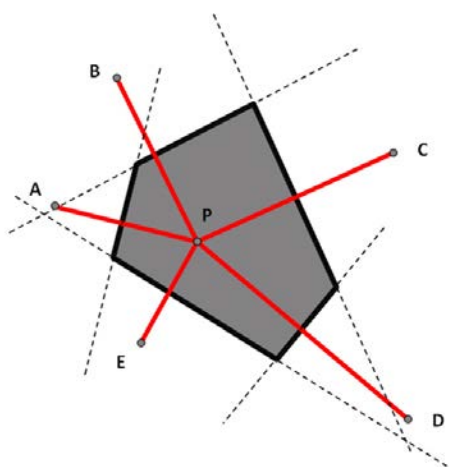
W opublikowanym w 1911 roku artykule *Precipitation large areas* amerykański meteorolog Alfred H. Thiessen (1872–1931) zaproponował metodę wyznaczania wieloboków pól opadowych (A. Thiessen 1911), umożliwiającą wyznaczenie wieloboków identycznych do uzyskanych w metodzie diagramów Woronoja. Metoda poligonów Thiessena znalazła zastosowanie m.in. w meteorologii do opracowania pola opadu na podstawie pomierzonych wartości jako tzw. metoda wieloboków równego zadeszczenia (P.Z. Sen 2009).

Opisywana w encyklopediach, słownikach i samouczkach metoda wyznaczania poligonów Thiessena-Voronoi określana jest jako diagramy lub poligony Woronoja (ryc. 2), a czasami jako poligony Thiessena. Według opinii zamieszczonej na popularnej liście dyskusyj-

<sup>2</sup> [https://slovar.wikireading.ru/2408143\\_\\_\\_https://dic.academic.ru/dic.nsf/rurwiki/140128](https://slovar.wikireading.ru/2408143___https://dic.academic.ru/dic.nsf/rurwiki/140128)

<sup>3</sup> <https://www.degruyter.com/view/j/crll.1909.issue-136/crll.1909.136.67/crll.1909.136.67.xml>

<sup>1</sup> <http://mir-prekrasen.net/referat/4254-voronoy-georgiy-feodosevich.html>



Ryc. 2. Graficzna reprezentacja poligonów Voronoja (opracowanie własne)

nej dotyczącej GIS obaj uczeni stworzyli tę samą ideę i metodę niezależnie, dlatego metoda powinna być nazywana podwójnie<sup>4</sup>. W najbardziej popularnym programie GIS dystrybuowanym jako Open Source QGIS występuje nazwa poligon Voronoja.

Warto wspomnieć o oryginalnym zastosowaniu poligonów Voronoja przez Lecha Ratajskiego. Poligony konstruowane na kanwie mapy kropkowej pokazują poprzez relacje wielkości różnicowanie natężenia zjawiska. Tego rodzaju konstrukcja nosi nazwę sieci zmiennej gęstości nieregularnej (J. Szewczuk 1977).

### 3.3. Popularność hasła Voronoi w Internecie

Metoda diagramów Voronoja staje się coraz bardziej popularna, a o jej znaczeniu świadczą wyniki kwerendy przeprowadzonej w Internecie 10 kwietnia 2018 roku. Po wpisaniu hasła „voronoi” lub „voronoi” diagram w wyszukiwarce Google otrzymujemy ponad dwa miliony wyników, na kanale youtube otrzymujemy dostęp do ponad sześciu tysięcy filmów; kilka z nich ma ponad sto tysięcy wyświetleń. Na portalu naukowym Researchgate otrzymujemy zestawienie około stu artykułów zawierających słowo

<sup>4</sup> <https://gis.meta.stackexchange.com/questions/3677/voronoi-vs-thiessen-vs-delaunay-triangulation-one-or-more-tags>.

„Voronoi” w tytule umieszczonych na tym portalu od początku 2017 roku (w ciągu 18 miesięcy). O popularności metody świadczy także opisanie diagramów Voronoja w Wikipedii aż w 25 wersjach językowych<sup>5</sup>.

### 3.4. Popularność metody w podręcznikach naukowych

Hasło Voronoi (Woronoj) nie występowało w encyklopediach wydanych w latach osiemdziesiątych i dziewięćdziesiątych, takich jak polska edycja encyklopedii Britannica, encyklopedia Larousse’a lub „Wielka Encyklopedia PWN”. Dopiero rozwój komputerowych metod obliczeniowych, grafiki komputerowej, biologii molekularnej, a przede wszystkim programów z grupy systemów informacji geograficznej (GIS) uwypuklił znaczenie metody obliczania diagramów Voronoja w wielu dziedzinach: geometrii obliczeniowej, inżynierii, matematyce, geografii, geoinformatyce.

Jedną z pierwszych pozycji książkowych w całości poświęconych metodzie Voronoja ukazała się w 2000 roku (A. Okabe i in. 2009). W kolejnych latach pojawiło się kilka ważnych publikacji dotyczących diagramów Voronoja, m.in. książka wydana w 2008 roku przez wydawnictwo Springer *Generalized Voronoi Diagram: A geometry-based approach to computational intelligence*, mająca na celu „dokonanie dogłębnego przeglądu i analizy podstawowych metod i technik opracowanych zgodnie z koncepcjami Voronoja” (M. Gavrilova 2008) oraz *Voronoi diagrams and Delaunay triangulations*, wydana w 2013 roku przez World Scientific Publishing (F. Aurenhammer i in. 2013). Objasnienia dotyczące diagramów Voronoja opracowano także w postaci skryptów przeznaczonych dla studentów i w różnych materiałach szkoleniowych (M. Serwecińska 2014).

W podręczniku *Geographic Information Systems and science* (P.A. Longley i in. 2005) autorzy posługują się nazwą poligony Thiessena wspominając, że metoda ta jest znana także jako Voronoi and Dirichlet polygons. W specjalnej ramce poświęconej uczonemu Atsu Okabe napisano, że jest on specjalistą w zakresie „wyznaczania poligonów Thiessena za pomocą diagramów Voronoja”.

<sup>5</sup> [https://pl.wikipedia.org/wiki/Diagram\\_Voronoja](https://pl.wikipedia.org/wiki/Diagram_Voronoja)

Polscy autorzy podręczników z zakresu geoinformatyki (GIS) do opisu metody wieloboków stosują zamiennie oba nazwiska – Thiessen i Woronoj. Wieloboki Thiessena wymieniono w pierwszym polskim podręczniku dotyczącym geoinformatyki J. Gaździckiego (1990). W niektórych późniejszych polskich podręcznikach autorzy podają równocześnie oba nazwiska. A. Magnuszewski (1999) stosuje nazwę „wieloboki Thiessena zwane także wielobokami Voronoi lub podziałem Dirichleta”. J. Urbański (2008) także stosuje nazwę poligony Thiessena, wspomina jednak o zamiennych nazwach – diagramy Dirichleta lub Voronoi.

O znaczeniu diagramów Woronoja świadczą odbywające się cyklicznie poświęcone im międzynarodowe sympozja z cyklu „International Symposium on Voronoi Diagrams in Science and Engineering”<sup>6</sup>. Podczas konferencji zorganizowanej z okazji 145 rocznicy urodzin Woronoja

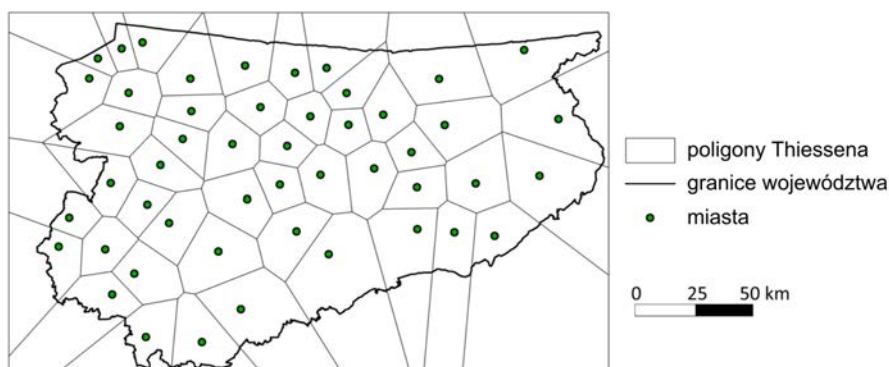
(poligonów Thiessena) jako narzędzia w oprogramowaniu GIS.

#### 4.1. Implementacja diagramów Woronoja w aplikacjach GIS

Tylko nieliczne metody i algorytmy zaprogramowane w aplikacjach GIS noszą nazwy ich twórców. Wyjątkiem od tej reguły jest metoda diagramów Woronoja (poligonów Thiessena).

Na liście modułów obliczeniowych programu GRASS GIS występuje tylko jeden moduł, w którego nazwie umieszczono nazwisko – jest to nazwisko Woronoja (*v.voronoi – Creates a Voronoi diagram constrained to the extents of the current region from an input vector map containing points or centroids*)<sup>8</sup>.

W programach komputerowych z grupy GIS, które powstały w Stanach Zjednoczonych do opisywanej metody używano nazwiska Thies-



Ryc. 3. Poligony Thiessena-Woronoja dla miast w województwie warmińsko-mazurskim (opracowanie własne)

noja w Kijowie w 2013 roku przedstawiono referaty w sześciu obszarach badawczych nawiązujących do jego spuścizny naukowej<sup>7</sup>.

#### 4. Popularność metody w aplikacjach GIS i jej znaczenie w badaniach naukowych

Poniżej zestawiono najbardziej popularne przykłady i zastosowania diagramów Woronoja

sena (ArcGIS) lub Woronoja (GRASS GIS, MapInfo). W starszych wersjach programu ArcGIS (np. 9.2) posługiwano się jeszcze terminem Voronoi Maps<sup>9</sup>. W programach dystrybuowanych na zasadzie wolnej licencji częściej zastosowano nazwisko Voronoi (ILWIS, GRASS GIS, QGIS), rzadziej Thiessen, np. w programie SAGA. W tabeli 1 zestawiono wybrane programy

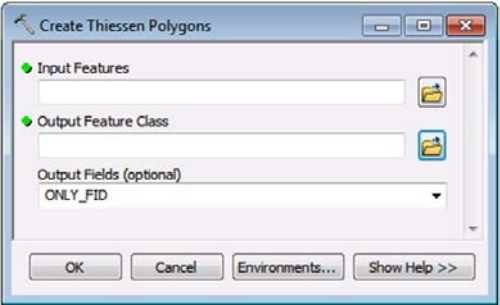

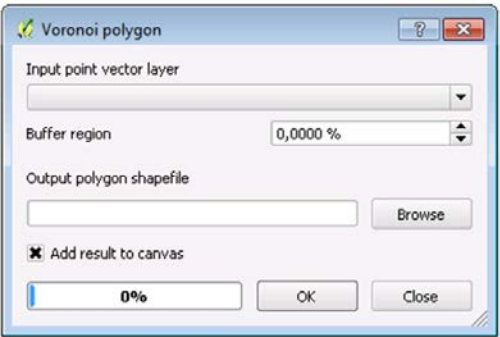
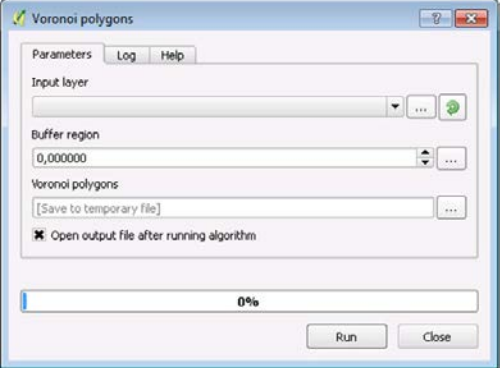
<sup>6</sup> <http://voronoi.hanyang.ac.kr/vd2005/http://bioinf.spbau.ru/isvd2013/home>

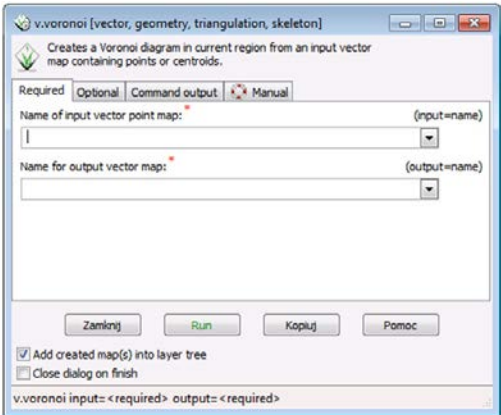
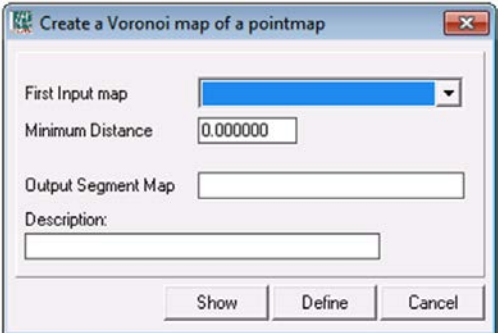
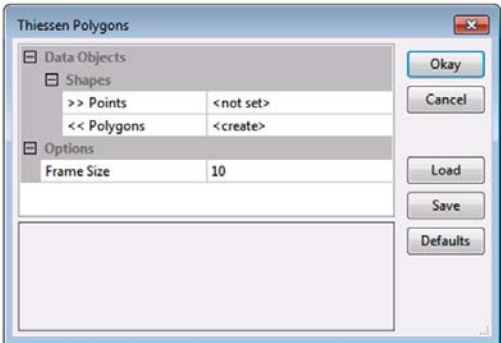
<sup>7</sup> <http://www.fmi.npu.edu.ua/ua/voronoi2013>

<sup>8</sup> GRASS GIS manual – <https://grass.osgeo.org/grass75/manuals/v.voronoi.html>

<sup>9</sup> [http://webhelp.esri.com/arcgisdesktop/9.2/index.cfm?TopicName=Voronoi\\_maps](http://webhelp.esri.com/arcgisdesktop/9.2/index.cfm?TopicName=Voronoi_maps)

Tabela 1. Moduły do obliczania poligonów Woronoja (Thiessena) w najpopularniejszych programach GIS

Program	Miejsce w menu programu	Graficzna prezentacja okna narzędziowego
ArcGIS 10.4	ArcMap (Toolbox), Analyst Tools, Proximity, Create Thiessen Polygons	
MapInfo 12.1	(Menu) Table, Voronoi, Table Voronoi	
QGIS 2.14	(Menu) Vector, Geometry Tools, Voronoi polygon	
QGIS 2.18	(Menu) Processing, Processing Toolbox, QGIS gealgoritms, Vector geometry tools, Voronoi polygons	

Program	Miejsce w menu programu	Graficzna prezentacja okna narzędziowego
GRASS GIS 7.4.0	(Menu) Vector, Generate areas from points, Voronoi diagram/Thiessen polygons [v.voronoi]	
ILWIS 3.8.5	(Menu) Operations, Segment Operations, Voronoi map	
SAGA GIS 2.3.2	(Menu) Geoprocessing, Shapes, Points, Thiessen polygons	

GIS, wskazano między innymi umiejscowienie narzędzi w menu programów lub skrzynkach narzędziowych.

## 4.2. Zastosowania diagramów Woronoja

Poniżej wymieniono przykładowe zastosowania diagramów Woronoja, zarówno w klasycznej postaci wieloboków dwuwymiarowych, jak i z modyfikacjami. Metodę diagramów Woronoja (często pod nazwą poligony Thiessena) wykorzystuje się do konstrukcji map reprezentatywności punktów (ryc. 2), np. jak już wspomniana metoda regionów opadowych.

Diagramy Woronoja w połączeniu z triangulacją Delaunaya (metodę opracował w 1934 roku rosyjski matematyk Borys Delone), będącą grafem dualnym diagramu Woronoja, są wykorzystywane w opracowaniu i wizualizacji modeli rzeźby terenu (F. Anton i in. 1998; M. Dakowicz, C. Gold 2002).

Metoda diagramów Woronoja jest wykorzystywana także w badaniach zjawisk społeczno-gospodarczych. Poligony w klasycznej postaci były wykorzystywane do wyznaczenia dostępności komunikacyjnej m.in. dworców kolejowych i innych przystanków komunikacyjnych, szkół, szpitali (H. Wu i in. 2013, F. Karimi i in. 2009, F. Rezende i in. 2000).

Metoda poligonów była wykorzystana w badaniu przestrzennych wzorców rozmieszczenia i dostępności sklepów dyskontowych (W. Kisiąła, M. Rudkiewicz 2017), do określenia dostępności terenów zieleni w niektórych dużych miastach Europy (A. Bochenek, T. Jasiński 2015), do wyznaczania obszarów w relacji społeczność – najbliższy usługodawca. Typowe przykłady jej zastosowania to wyznaczanie obwodów szkolnych i dostępności usług medycznych w rejonie Preszowa na Słowacji (S. Lovacka 2008) oraz w opracowaniu zasięgów krajobrazu pogranicza kulturowego (A. Awramiuk-Godun 2013). W badaniach przeprowadzonych dla aglomeracji Pekinu poligony Woronoja (Thiessena) zostały wykorzystane do wyznaczania strefy ruchu tranzytowego (S. Wang i in. 2014). Poligony Woronoja zostały także wykorzystane do wyznaczania morskich stref brzegowych, np. w zatoce Salwa między Arabią Saudyjską i Katarą (G. Cosquer, J.F. Hangouët 2003).

Modyfikacją diagramów Woronoja jest tzw. metoda wagowa diagramów Woronoja. Polega

ona na zwiększeniu lub zmniejszeniu zasięgów diagramów wokół punktu w zależności od wagi przypisanej temu punktowi (F. Aurenhammer, H. Edelsbrunner 1984; A. Okabe i in. 2009; P. Dong 2008). Metodę w takiej postaci wykorzystywano do uzyskania algorytmu obliczania odległości wypukłych w sieciach transportowych (W. Bae, K.Y. Chwa 2005).

## 4.3. Grafika komputerowa

Rozwój grafiki komputerowej umożliwia konstruowanie diagramów Woronoja w wersji 3D za pomocą animacji komputerowych (H. Ledoux 2007), np. do opisu struktury krystalicznej i struktury budowy atomów w postaci trójwymiarowej (Y. Xu i in. 2013) lub do planowania ścieżki dla bezzałogowych pojazdów podwodnych (UUV) (M. Candelero i in. 2017). Obszernie możliwości wykorzystania diagramów Woronoja w modelowaniu 3D zaprezentował T. van der Putte (2009). Zastosowań diagramów w wersji 3D prawdopodobnie będzie przybywać ze względu na umieszczenie modułu obliczeniowego w popularnym środowisku obliczeniowym MATLAB (*Mathworks Documentation*).

## 5. Podsumowanie

W 2018 roku przypada stulecie powstania Zakładu Geograficznego na Uniwersytecie Warszawskim. Jednak kilkanaście lat wcześniej profesor Cesarskiego Uniwersytetu Warszawskiego Georgij Woronoj opracował algorytm znany i stosowany na całym świecie. Metoda diagramów Woronoja znajduje zastosowanie do delimitacji przestrzeni w naukach powiązanych z przestrzenią geograficzną.

Rozwój oprogramowania GIS przyczynił się niewątpliwie do popularności metody. Szkoda tylko, że w programie ArcGIS moduł obliczający poligony Woronoja nosi nazwę poligonów Thiessena. Skutkuje to tym, że wiele osób na świecie korzysta z metod opracowanych równolegle przez dwóch uczonych, nie kojarząc nazwiska Woronoja. Woronoj (Voronoy) to jedyne nazwisko związane z Polską występujące w menu (narzędziach) oprogramowania GIS.

Na koniec warto zacytować słowa M.I. Kratko (2011), prorektora Uniwersytetu w Łucku (Ukraina): „W osobie Heorhija Woronego mamy przykład szczerzej pracy uczonego ukraińskiego na niwie nauki polskiej, która potem wpływała



na rozwój nauki na Ukrainie, w szczególności w Uniwersytecie Lwowskim, gdzie uczniowie

Woronego i uczniowie ich uczniów stworzyli sławną lwowską szkołę matematyczną”.

## Literatura

- Anton F., Gold C.M., Mioc D., 1998, *Local coordinates and interpolation in a Voronoi diagram for a set of points and line segments*. W: The Voronoi Conference on Analytic Number Theory and Space Tillings, s. 9–12.
- Aurenhammer F., Edelsbrunner H., 1984, *An optimal algorithm for constructing the weighted Voronoi diagram in the plane*. „Pattern Recognition” Vol. 17, no. 2, s. 251–257. [https://doi.org/10.1016/0031-3203\(84\)90064-5](https://doi.org/10.1016/0031-3203(84)90064-5)
- Aurenhammer F., Klein R., Lee D.-T., 2013, *Voronoi Diagrams and Delaunay triangulations*. World Scientific Publishing.
- Awramiuk-Godun A., 2013, *Rozmieszczenie obiektów sakralnych jako kryterium wyznaczania zasięgu krajobrazu pogranicza kulturowego*. „Prace Komisji Krajobrazu Kulturowego” nr 19, s. 62–72.
- Bae W., Chwa K.Y., 2005, *Shortest paths and Voronoi diagrams with transportation networks under general distances*. Berlin, Heidelberg: Springer Verlag.
- Biografia Markow. [http://wazniak.mimuw.edu.pl/index.php?title=Biografia\\_Markow%2C\\_Andrzej](http://wazniak.mimuw.edu.pl/index.php?title=Biografia_Markow%2C_Andrzej)
- Bochenek A., Jasiński T., 2015, *Zastosowanie algorytmu Woronoja do określenia dostępności terenów zielonych w wybranych, dużych miastach Europy*. „Współczesne problemy i kierunki badawcze w geografii” T. 3, Instytut Geografii i Gospodarki Przestrzennej UJ, s. 17–27.
- Candeloro M., Lekkas A.M., Sorensen A.J., 2017, *A Voronoi-diagram-based dynamic path-planning system for underactuated marine vessels*. „Control Eng. Pract.” Vol. 61, s. 41–54. DOI: 10.1016/j.conengprac.2017.01.007
- Cosquer G., Hangouët J.F., 2003, *Delimitation of land and sea boundaries: Geodetic and geometric bases*. FIG Working Week 2003, Paris, France, April 13–17. [https://www.fig.net/resources/proceedings/fig\\_proceedings/fig\\_2003/TS\\_20/PP20\\_1\\_Cosquer\\_Hangouet.pdf](https://www.fig.net/resources/proceedings/fig_proceedings/fig_2003/TS_20/PP20_1_Cosquer_Hangouet.pdf)
- Dakowicz M., Gold C., 2002, *Extracting meaningful slopes from terrain contours*. W: *Computational Science – ICCS 2002*. Red. S.P.M.A. Sloot, A.G. Hoekstra, C.J.K. Tan, J.J. Dongarra, „Lecture Notes in Computer Science” Vol. 2331. Berlin, Heidelberg: Springer.
- Descartes R., 1644, *Le monde de M. Descartes ou le Traité de la Lumière*. Paris.
- Dirichlet G.L., 1850, *Über die Reduction der positiven quadratischen Formen mit drei unbestimmten ganzen Zahlen*. „Journal für die Reine und Angewandte Mathematik” Vol. 40, s. 209–227.
- Dong P., 2008, *Generating and updating multiplicatively weighted Voronoi diagrams for point, line and polygon features in GIS*. „Computers & Geosciences” Vol. 34, no. 4, s. 411–421.
- Duda R., 2016, *Matematyka. Nauki ścisłe i przyrodnicze na Uniwersytecie Warszawskim*. W: *Dzieje Uniwersytetu Warszawskiego 1816–1915*, Red. T. Kizwalter, „Monumenta Universitatis Varsoviensis 1816–2016”, Warszawa: Wydawnictwa Uniwersytetu Warszawskiego, s. 671–757.
- Gavrilova M.L., red., 2008, *Generalized Voronoi Diagram: A Geometry-based approach to computational intelligence*. „Studies in Computational Intelligence” Vol. 158. Springer.
- Gaździcki J., 1990, *Systemy informacji przestrzennej*. Warszawa: Państwowe Przedsiębiorstwo Wydawnictwa Kartograficznych.
- Georgij Woronoi. <https://ru.wikipedia.org/wiki>
- Hurwic J., 2016, *Wacław Sierpiński 1882–1969*. W: *Dzieje Uniwersytetu Warszawskiego 1816–1915*, Red. T. Kizwalter, „Monumenta Universitatis Varsoviensis 1816–2016”, Warszawa: Wydawnictwa Uniwersytetu Warszawskiego, s. 231.
- Karimi F., Delavar M.R., Mostafavi M.A., 2009, *Space allocation of educational centers using multiplicatively weighted Voronoi diagram*. ISPRS COST Workshop on Quality Scale & Analysis Aspects of City Models, Lund.
- Kisiała W., Rudkiewicz M., 2017, *Zastosowanie diagramu Woronoja w badaniu przestrzennych wzorców rozmieszczenia i dostępności sklepów dyskontowych*. „Przegląd Geograficzny” T. 89, nr 2, s. 187–212.
- Kratko M.I., 2011, *Heorhij Woronij – matematyk ukraiński i polski*. [http://voronuy.at.ua/publ/heorhij\\_woronij\\_matematyk\\_ukrainski\\_i\\_polski/1-1-0-48](http://voronuy.at.ua/publ/heorhij_woronij_matematyk_ukrainski_i_polski/1-1-0-48)
- Ledoux H., 2007, *Computing the 3D Voronoi diagram robustly: An easy explanation Voronoi diagrams in science and engineering*, 2007. ISVD '07. 4th International Symposium, s. 117–129.
- Longley P.A., Goodchild M., Maguire D.J., Rhind D.W., 2005, *Geographic Information Systems and Science*. Chichester – New York: John Wiley & Sons, 342 s.
- Lovacka S., 2008, *The use of the Voronoi tessellation for purposes of service distribution districts delimitation (The example of the Prešov nodal region)*. „Folia Geographica” Vol. 12, s. 163–171.
- MacTutor History of Mathematics. <http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Biographies/Voronoy.html>
- Magnuszewski A., 1999, *GIS w geografii fizycznej*. Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN.

- Mathworks Documentation. Voronoi Diagrams. <https://www.mathworks.com/help/matlab/math/voronoi-diagrams.html>
- Miąso J., 1989, *Trudne narodziny Politechniki Warszawskiej: (przyczynek do dziejów polityki naukowej w Królestwie Polskim)*. „Kwartalnik Historii Nauki i Techniki” T. 34, nr 4, s. 777–818.
- Okabe A., Boots B., Sugihara K., Chiu S.N., 2009, *Spatial tessellations: Concepts and applications of Voronoi diagrams*. Chichester – New York: John Wiley & Sons.
- Rezende F., Almeida R., Nobre, F., 2000, *Diagramas de Voronoi para a definicao de areas de abrangencia de hospitais publicos no Municipio do Rio de Janeiro*. „Cadernos de Saude Publica” Vol. 16, n. 2, s. 467–475.
- Schiler J. 2005, *Uniwersytet Warszawski. Czy Uniwersytet i czy w Warszawie?* „Kwartalnik Historii Nauki i Techniki” T. 50 nr 2–4, s. 25–58.
- Schiller-Walicka J., 2016, *Cesarski Uniwersytet Warszawski: między edukacją a polityką 1869–1917*. W: *Dzieje Uniwersytetu Warszawskiego 1816–1915*. Red. T. Kizwalter, „Monumenta Universitatis Varsoviensis”, Warszawa: Wydawnictwa Uniwersytetu Warszawskiego, s. 557–703.
- Schinzel A., 2016, *Georgij Woronoi – Mistrz Wacława Sierpińskiego*. W: *Portrety uczonych. Profesorowie Uniwersytetu Warszawskiego 1816–1915*. Red. M. Wąsowicz, A.K. Wróblewski. Warszawa: Wydawnictwa Uniwersytetu Warszawskiego, s. 491.
- Schumann A.H., 1998, *Thiessen polygon*. W: *Encyclopedia of Hydrology and Lakes*, „Encyclopedia of Earth Science”. Dordrecht: Springer, s. 648–649.
- Sen P.Z., 2009, *Spatial modeling principles in earth sciences*. Springer, s. 52–54.
- Serwecińska M., 2014, *Diagramy Voronoi. Letnia Szkoła Matematyki*. Uniwersytet Śląski. <http://www.math.us.edu.pl/lisim2014/MSerwecinska-lsim2014.pdf>
- Sierpiński W., 1908, *Georgij Woronoi. Streszczenie wykładu, wypowiedzianego na Uniwersytecie Lwowskim dnia 23 listopada 1908 r.* W: *Portrety uczonych. Profesorowie Uniwersytetu Warszawskiego 1816–1915*. Red. M. Wąsowicz, A.K. Wróblewski. Warszawa: Wydawnictwa Uniwersytetu Warszawskiego, s. 484–490.
- Syta H., 2001, *The scientific legacy of Georgii Voronoi and contemporary science*. W: *Mathematics and the mathematical sciences in Ukraine in the twentieth century*. National Akad. Nauk Ukrainy Inst. Mat., Kiev, s. 89–94.
- Syta H., 2010, *Short biography of G. Voronoi*. [http://voronuy.at.ua/publ/statti\\_anglijska\\_mova/short\\_biography\\_of\\_g\\_voronoi\\_p1/4-1-0-49](http://voronuy.at.ua/publ/statti_anglijska_mova/short_biography_of_g_voronoi_p1/4-1-0-49)
- Szewczuk J., 1977, *Sieć zmiennogęsta nieregularna*. „Polski Przegl. Kartogr.” T. 9, nr 1, s. 1–12.
- Thiessen A., 1911, *Precipitation averages for large areas*. „Monthly Weather Review” Vol. 39, no. 7, s. 1082–1089.
- Ulmer A., 2016, *Dzieje Politechniki Warszawskiej w zarysie*. „Maszyny Elektryczne – Zeszyty Problemowe” T. 4(112), s. 193–199.
- Urbański J., 2008, *GIS w badaniach przyrodniczych*. Gdańsk: Wydawnictwo Uniwersytetu Gdańskiego, 252 s.
- van der Putte T., 2009, *Using the discrete 3D Voronoi diagram for the modelling of 3D continuous information in geosciences*. Master Thesis, Geographical Information Management and Applications. Utrecht University. [http://www.gdmc.nl/publications/2009/3D\\_Voronoi\\_diagram.pdf](http://www.gdmc.nl/publications/2009/3D_Voronoi_diagram.pdf)
- Voronoi G., 1908, *Nouvelles applications des paramètres continus à la théorie de formes quadratiques*. „Journal für die Reine und Angewandte Mathematik” Vol. 134, s. 198–287.
- Wang S., Rong J., Yang Z., 2014, *Transit traffic analysis zone delineating method based on Thiessen polygon*. „Sustainability” Vol. 6, no. 4, s. 1821–1832. DOI: 10.3390/su6041821
- Wu H., Takahashi S., Lin C., Yen H., 2013, *Voronoi-based label placement for metro maps*. W: *17th International Conference on Information Visualization*. London 2013, s. 96–101. DOI: 10.1109/IV.2013.11
- Xu Y., Fan X.H., Liu K.G., Shi L., Xu. B., Wang F.M., Lin J.P., 2013, *Applying and practicing of MATLAB programing for Voronoi tessellation*. „Advanced Materials Research” Vol. 706–708, s. 391–394.

## Voronoi diagrams – inventor, method, applications

### Summary

The article presents the person and works of Georgy Voronoi (1868–1908), the inventor of an original method of diagrams, a student of the famous mathematician Andrey Markov. Georgy Voronoi graduated from the Department of Physics and Mathematics at the University of St. Petersburg, and

subsequently worked as a professor of mathematics at the Imperial University of Warsaw. One of his students was the future outstanding Polish mathematician Wacław Sierpiński. In his brief lifetime G. Voronoi published several important scientific articles on number theory. In an almost 100 page paper in

French published in 1908 he described a method of diagrams, or polygons, which became known as the method of Voronoi diagrams.

In the digital age this method and its modifications found new applications. The entry “Voronoi” is getting more popular on the Internet, and the method of Voronoi diagrams and its modifications are widely described in handbooks and scientific articles. The

article presents application of the method in the most popular computer programs from the Geographic Information System (GIS) group and presents examples of its usage in research on geographic space in various scientific disciplines.

Keywords: Voronoi diagram, Georgij Voronoi, GIS, University of Warsaw

Niniejszy tekst jest polską wersją artykułu: Wojciech Pokojski, Paulina Pokojska: *Voronoi diagrams – inventor, method, applications*. „Polish Cartographical Review” Vol. 50, 2018, no. 3, pp. 141–150, DOI: 10.2478/pcr-2018-0009.

**W przypadku cytowania należy podawać wersję w języku angielskim.**