

PAWEŁ PĘDZICH
Politechnika Warszawska
Zakład Kartografii
ppedzich@gik.pw.edu.pl

Obraz świata na mapach i globusach wielościennych

Zarys treści. Celem artykułu jest popularyzacja wiedzy na temat map i odwzorowań wielościennych. Odwzorowania takie są stosowane w kartografii od ponad 200 lat i mają bardzo ciekawą historię, a ponadto szereg interesujących własności – przede wszystkim pozwalają w sposób ciągły oraz ze stosunkowo niewielkimi zniekształceniami przedstawić obraz całej powierzchni Ziemi. Znajdują zastosowanie w meteorologii, prezentacji płyt tektonicznych i odkryć geograficznych. Posiadają także wiele zalet

dydaktycznych, pozwalając na przedstawienie Ziemi zarówno na płaszczyźnie, ale również po złożeniu w postaci wielościanu. W artykule pokazano, jak stosując współczesne narzędzia komputerowe można w bardzo prosty sposób opracować mapy w tych odwzorowaniach oraz wykonać wirtualny globus na podstawie map wielościennych.

Słowa kluczowe: mapy wielościenne, wirtualne globusy wielościenne, odwzorowania kartograficzne, odwzorowania wielościenne, wielościany

1. Wielościany w kartografii

Od wieków wielościany są stosowane w wielu różnych dziedzinach nauki, techniki i sztuki. Pasjonowali się nimi zarówno naukowcy, jak i artyści. Znane i podziwiane dzieła Albrechta Dürera (1471–1528) oraz Leonarda Da Vinci (1452–1519) przedstawiają rysunki wielościanów w różnym kontekście i o różnej symbolice (ryc. 1, 2). Dzieła te wzbudzają zachwyt oraz dają pole do poszukiwań interpretacji po dzień dzisiejszy.

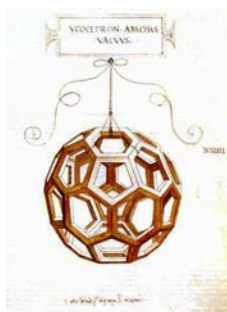
W kartografii wielościany stosuje się w wielu różnych opracowaniach związanych zarówno z modelowaniem, analizami przestrzennymi, jak i wizualizacją danych przestrzennych. W odwzorowaniach kartograficznych do opracowania map mają zastosowanie głównie wielościany wypukłe; są to m.in. wielościany foremne zwane platońskimi, wielościany półforemne zwane archimedesowymi oraz dualne do nich wielościany Catalana.

Platon (427–347 p.n.e.) jako pierwszy opisał pięć regularnych wielościanów (ryc. 3). W dialogu *Timajos* (360 r. p.n.e.) wywodził, w jaki sposób



Ryc. 1. *Melancholia* Albrechta Dürera
(źródło: Wikimedia)

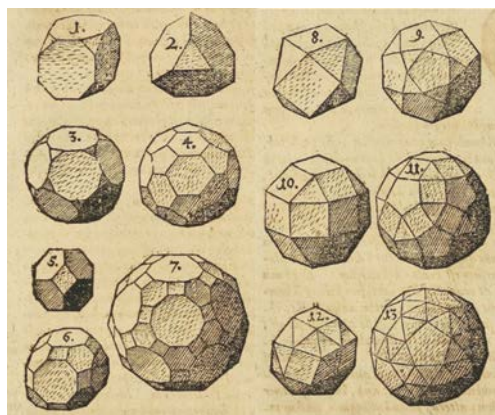
z dwóch rodzajów trójkątów można utworzyć cztery wielościany (A. Heinz 2008). Przypisał je do czterech żywiołów: sześciąt do ziemi



Ryc. 2. Leonardo Da Vinci *Ycocedron Abscisus*
(źródło: www.georgehart.com/virtual-polyhedra/leonardo.html)



Ryc. 3. Bryły platońskie
(J. Kepler, *Harmonices Mundi*, 1619)



Ryc. 4. Wielościany archimedesowe
(J. Kepler, *Harmonices Mundi*, 1619)

(jako najmniej ruchomej czy trudnej do poruszenia), czworościan – ogniewi (jako „najruchliwшему”, mającemu „najostrzejsze pocięte brzegi i najostrzejsze języki w każdym kierun-

ku”), ośmiościan – powietrzu, a dwudziestościan – wodzie (F. Copleston 1998). Gdy jego uczeń Teajtet (ok. 140–368 p.n.e.) odkrył piątą bryłę foremną – dwunastościan, Platon natychmiast uznał, że jest to symbol Wszechświata, że Bóg musiał stworzyć świat w takim właśnie kształcie (M. Szurek 2000). Nazwy greckie wielościanów platońskich: tetraedr, heksaedr, oktaedr i ikosaedr a także dodekaedr są do dziś używane w terminologii matematycznej niemal wszystkich języków świata, za wyjątkiem języka polskiego (M. Szurek 2000).

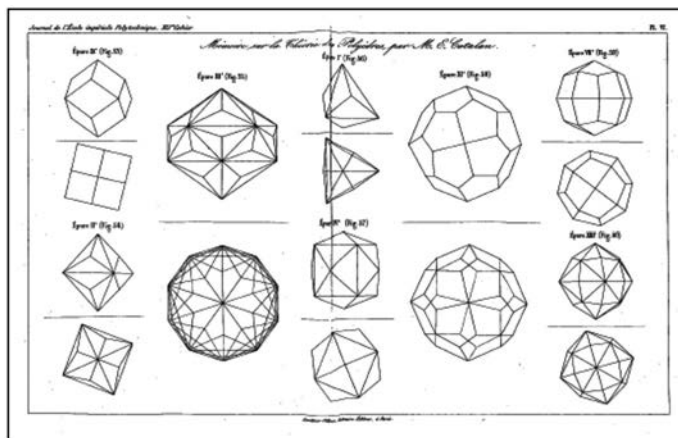
Grecki matematyk Archimedes (ok. 287–212 p.n.e.) był twórcą wielościanów nazwanych później archimedesowymi. Do dziś nie zachowały się jego prace na ten temat. Możemy jedynie przeczytać o tych wielościanach w późniejszych pracach innych autorów. We współczesnych opisach bryły archimedesowe są symetryczne, półforemne – półregularne wypukłe wielościany, tj. ich ściany są regularnymi wielokątami i ich wierzchołki są identyczne. Siedem z trzynastu wielościanów archimedesowych uzyskano z brył platońskich za pomocą procesu ścinania. Polega to na ścinaniu wierzchołków, w miejscu których powstają ściany nowego wielościanu. Wyróżnia się następujące trzynaście brył archimedesowych (ryc. 4): czworościan ścięty, sześćo-ośmiościan, sześciąt ścięty, ośmiościan ścięty, sześćo-ośmiościan rombowy mały, sześćo-ośmiościan rombowy wielki, sześćo-ośmiościan przycięty, dwudziesto-dwunastościan, dwunastościan ścięty, dwudziestościan ścięty, dwudziesto-dwunastościan rombowy mały, dwudziesto-dwunastościan rombowy wielki, dwudziesto-dwunastościan przycięty (J. D’Andrea 2011).

Na każdym wielościanie półforemnym można opisać sferę i w każdym wierzchołku wielościanu poprowadzić płaszczyznę styczną do tej sfery. Płaszczyzny te wytną wypukły wielościan, który jest dualny do wyjściowego. Wszystkie wielościany dualne do wielościanów półforemnych nazywamy wielościanami Catalana (T. Doroziński, Z. Pogoda 2009). Na rycinie 5 zaprezentowano szkice E. Catalana z jego wielościanami.

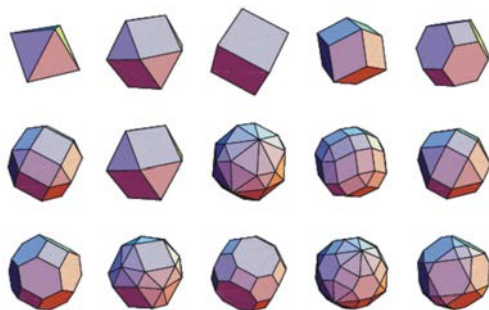
W kartografii znane są również wielościany Watermana (ryc. 6), które są rodziną wielościanów, wynalezionych około 1990 roku przez matematyka Steve’a Watermana. Wielościany te utworzone są poprzez zastosowanie metody najgęściej ułożonych kul w sześciacie.

Gęsto ułożone sfery, które są dalej od centrum niż zdefiniowany promień, są usuwane, a następnie tworzona jest otoczka wypukła uzyska-

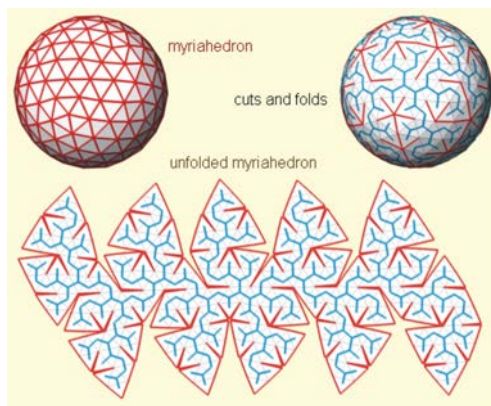
denaście (ryc. 8). Daje to możliwość tworzenia wielu różnych map na podstawie jednego odwzorowania sfery na sześcian. Jedną z pierw-



Ryc. 5. Szkice E. Catalana przedstawiające wielościany półforemne (źródło: M.E. Catalan 1865)



Ryc. 6. Wielościany Watermana (źródło: mathworld.wolfram.com/WatermanPolyhedron.html)

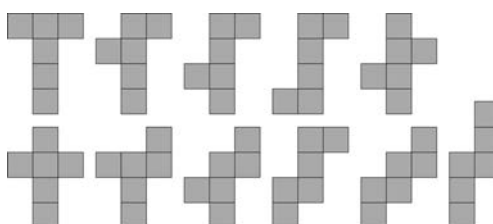


Ryc. 7. Myriaścian oraz jego siatka wg van Wijka (<http://www.win.tue.nl/~vanwijk/myriahedral/>)

nego zbioru punktów. W ten sposób powstają wielościany Watermana.

Jarke van Wijk (2008) z kolei wprowadził do kartografii wielościany o „niezliczonej” liczbie ścian (ryc. 7). Myriahedron to wielościan posiadający „mriad” ścian. Łacińskie słowo *myriad* – miriada pochodzi z greckiego *myrioi*, które oznacza „dziesięć tysięcy” lub „niezliczony”.

Siatki wielościanów powstają poprzez rozcięcie niektórych krawędzi i przedstawienie ich na płaszczyźnie. Jeden wielościan może mieć wiele siatek, przykładowo sześcian ma ich je-

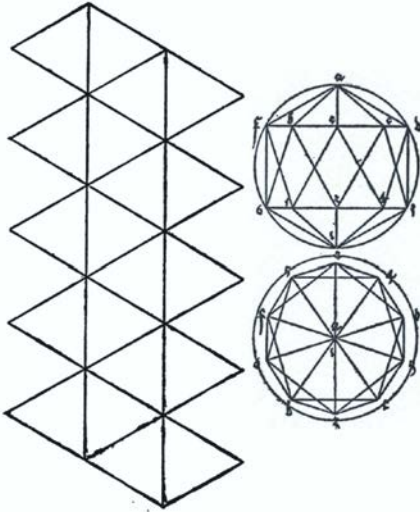


Ryc. 8. Jedenaście siatek sześcianu

szych prac związanych z przedstawianiem siatek wielościanów (ryc. 9) opublikował w 1525 roku w Norymberdze Albrecht Dürer. Wielu kartografów do dziś powołuje się na jego pracę *Unterweisung der Messung* i wskazuje go jako prekursora przedstawiania sfery na płaszczyźnie za pomocą wielościanów.

2. Słynne mapy wielościenne

Idea podziału sfery na części i osobne ich odwzorowanie sięga czasów Leonardo Da Vinci. Słynny włoski artysta wraz ze współpracownikami około 1514 roku skonstruował mapę



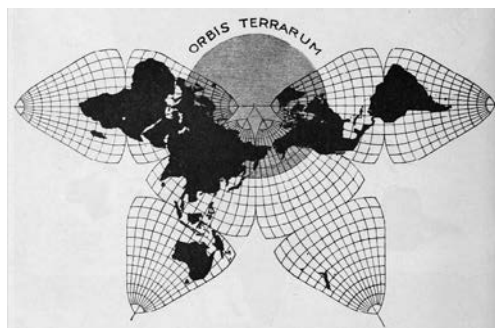
Ryc. 9. Szkice Albrechta Dürera przedstawiające konstrukcję siatki dwudziestościanu foremego (źródło: Wikimedia)

świata *Sphaera Mundi* z zastosowaniem krzywoliniowych trójkątnych równobocznych oktantów sfery (ryc. 10). Powierzchnię globu podzielono na osiem części tworzących osiem trójkątów sferycznych ograniczonych równikiem i południkami różniącymi się o 90° . Każdy z boków trójkąta jest łukiem okręgu o środku w przeciwległym wierzchołku i każdy z ośmiokątów połączono w grupy po cztery wokół każdego bieguna. Mapa nie posiada siatki kartograficznej. Taką siatkę do *Sphaera Mundi* (Paris 1551) dodał Oronce Fine (1494–1555), jako łuki okręgów w każdym oktancie, symetrycznym względem prostoliniowego obrazu południka centralnego. Odwzorowanie zostało wykorzystane do opracowania map także przez Guillaume Le Testu (1509–1573) w 1556 roku oraz przez Daniela Angelocratera (1569–1635) w 1616 roku (J. Snyder 1993).

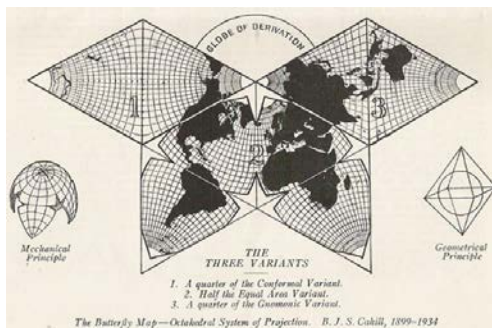
Zastosowaniem ośmiościanu do konstrukcji odwzorowań kartograficznych zainteresował się kalifornijski architekt Bernard J.S. Cahill (1866–1944). W 1909 roku zaprezentował, a w 1913 roku opatentował mapę świata z oktantami tak zaaranżowanymi, aby tworzyły kształt motyla (ryc. 11). Płaty sferyczne ograniczono południkami poczynając od południka $22^\circ 30'$ długości geograficznej zachodniej i z każdym 90 -stopniowym interwałem od tej długości, w taki sposób, aby zminimalizować nieciągłości lądów. B.J.S. Cahill użył autorskiego odwzorowania, w którym ograniczające płaty obrazy południków i równika były kombinacjami prostych, łuków i linii krzywych, nie całkiem wypełniających równoboczne trójkąty ośmiościanu. Opublikował także warianty swojej mapy wypełniając w całości te trójkąty w odwzorowa-



Ryc. 10. Mapa świata Leonardo Da Vinci (źródło: www.odt.org/Pictures/mappamun.jpg)



Ryc. 11. Mapa B.J.S. Cahilla
(źródło: portal Gene Keyes Website)



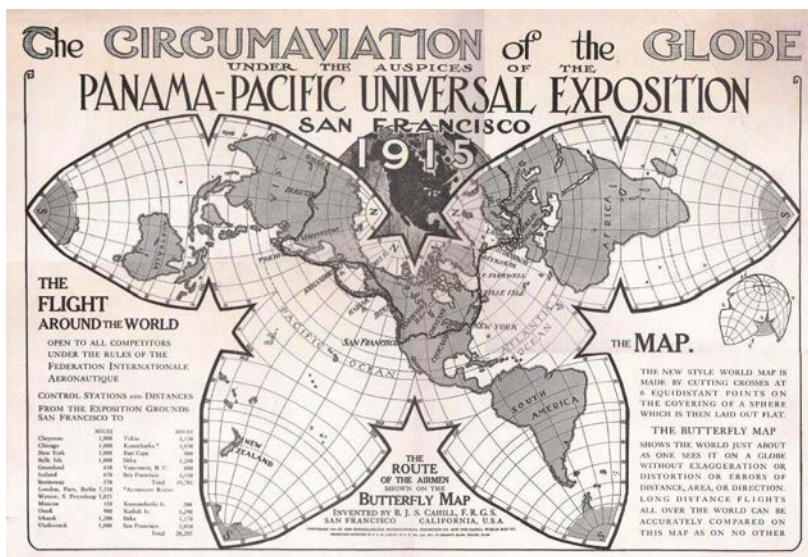
Ryc. 12. Trzy rodzaje odwzorowań zastosowanych do konstrukcji mapy Cahilla (1 – konforemne, 2 – równopolowe, 3 – gnomoniczne)
(źródło: portal Gene Keyes Website)

niach konforemnych i gnomonicznych (ryc. 12). W przypadku wersji bazującej na odwzorowaniu konforemnym zaadoptował rozwiązanie Oscara Adamsa. Autor mocno wierzył, że jego mapa jest najlepsza do celów meteorologicznych.

Mapa „motyl” swego czasu była bardzo popularna. W czasie wystawy Panama-Pacific w San Francisco w 1915 roku zaproponowano konkurs na 90-dniowy rejs samolotem dookoła świata. Trasę tej wycieczki przedstawiono na mapie wykonanej przez Cahilla (ryc. 13). Mapa ta została nagrodzona złotym medalem na wystawie w San Francisco. Jakiś czas później

została wykorzystana przez stan California i miasto Charleston do przedstawienia tras statków (ryc. 14).

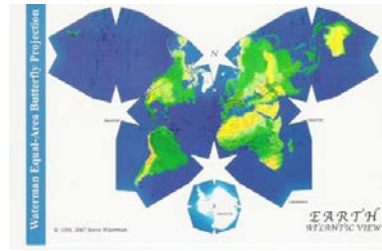
W 1996 roku Steve Waterman wzorując się na mapie Cahilla opublikował po raz pierwszy własną mapę w kształcie motyla (ryc. 15). Jako powierzchnię obrazu przyjął osmiościan ścięty. W swoim opracowaniu zastosował metodę najściślejzego upakowania kul. Ta metoda polega na łączeniu środków sfer najściślej upakowanych w sześcianie w celu utworzenia otoczki wypukłej. S. Waterman wybrał specyficzny własny wielościan oraz południk środkowy tak,



Ryc. 13. Mapa Cahilla nagrodzona w San Francisco w 1915 r. (źródło: portal Gene Keyes Website)



Ryc. 14. Trasy statków kursujących z San Francisco (źródło: portal GEO awesomeness)

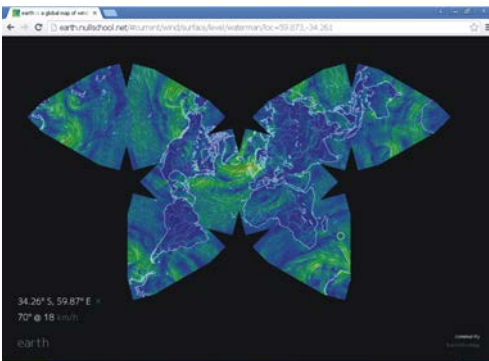


Ryc. 15. Mapa „motyl” S. Watermana (źródło: portal Gene Keyes Website)



Ryc. 16. Prezentacja połączeń lotniczych z Dubaju (źródło: D. Flynn 2014)

aby zminimalizować nieciągłości w obrazie głównych mas lądów. W przypadku tej wersji odwzorowania „motyl” przyjęto południk 20° długości wschodniej jako podstawę dzielenia sfery na oktanty.

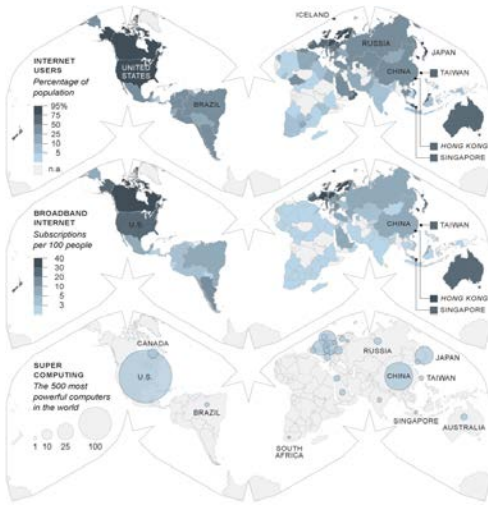


Ryc. 17. Mapa pogody w odwzorowaniu Watermana (źródło: portal Nullschool.net)

Przykładem współczesnego zastosowania mapy „motyl” jest mapa tras lotniczych z Dubaju (ryc. 16). Za pomocą kartodiagramu pokazano drogi lotnicze do różnych miast świata, podkreślając, że 1/3 mieszkańców Ziemi żyje w odległości czterech godzin lotu od Dubaju, a pozostałe 2/3 w odległości ośmiu godzin (D. Flynn 2014).

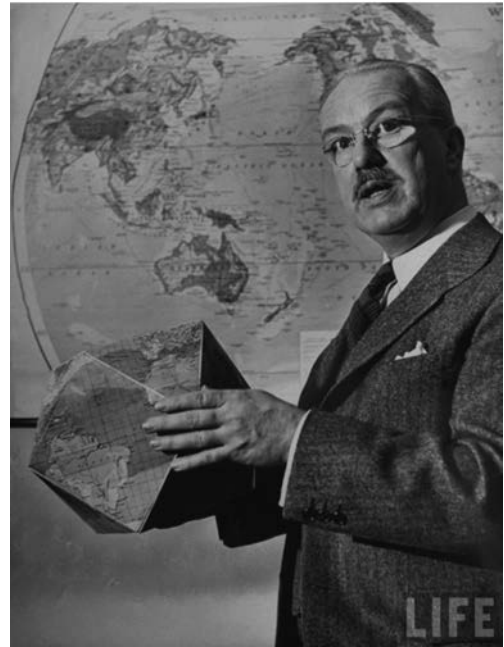
Innym przykładem współczesnego zastosowania odwzorowania Watermana jest animowana mapa, przedstawiająca warunki pogodowe na kuli ziemskiej oraz prognozę aktualizowaną co 3 godziny (ryc. 17). Autorem serwisu jest Cameron Beccario (Nullschool.net).

W 2011 roku „New York Times” opublikował interesującą serię map wykonanych w odwzorowaniu Watermana, prezentujących szybko zmieniający się świat komputeryzacji, komunikacji i technologii (ryc. 18). Za pomocą kartodiagramów i kartogramów przedstawiono wiele aspektów tej problematyki.



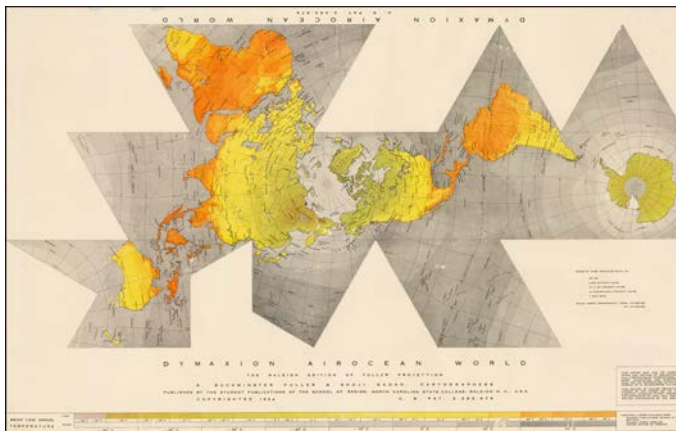
Ryc. 18. Mapy „motyl” zamieszczone w „New York Times” w 2011 r. (źródło: portal New York Times)

Również inne wielościanny znalazły zastosowanie do opracowania map. W 1943 roku magazyn „Life” opublikował odwzorowanie sfery na sześćo-ośmiościan (cuboctahedron). Odwzorowanie to opracował Richard Buckminster Fuller (ryc. 19). Interesującym aspektem tego rozwiązania jest odwzorowanie krawędzi wielościannu ze stałą skalą zniekształceń (D. van Leeuwen, D. Strebe 2006). W artykule pt. *Life presents Buckminster Fuller Dymaxion World* opisano to odwzorowanie oraz zamieszczono fragmenty mapy *Dymaxion (dynamic, maximum,*



Ryc. 19. R. Buckminster Fuller prezentujący swoją mapę na sześćo-ośmiościanie (źródło: Fuller 1943)

and tension) wraz z instrukcją jak wykonać sześćo-ośmiościan (z ośmiu równobocznych trójkątów oraz sześciu kwadratów) prezentujący powierzchnię Ziemi. Dokładny opis swojej mapy R.B. Fuller zawarł w patencie nr US 2393676 A w 1946 roku. Była to pierwsza dwuwymiarowa mapa całej powierzchni Ziemi, która przedsta-



Ryc. 20. Mapa Fullera *Airocean World Map* (źródło: portal BLR Antique Maps Inc.)

wia naszą planetę jako całość, bez dużych zniekształceń oraz dzielenia lądów na fragmenty.

W 1954 roku opublikowano mapę R.B. Fullera *Airocean World Map* wykorzystującą dwudziestościan foremny jako podstawę odwzorowania (ryc. 20), gdzie lądy pokazane są bez rozcięć. R.B. Fuller zaadaptował to samo odwzorowanie co poprzednio.

W 2012 roku w Nowym Jorku, w siedemdziesiątą rocznicę opublikowania mapy R.B. Fullera, Instytut Buckminstera Fullera ogłosił konkurs *Dymax Redux* na zaprojektowanie mapy, która nawiązywałaby do mapy R.B. Fullera. Zwyciężył zespół projektantki Nicole Santucci i firmy San Francisco Woodcats Map. Zwycięski projekt, zwany *Dymaxion Woodocean World*, ilustruje gęstość lasów na całym świecie dzięki wykorzystaniu kolorowych drewnianych tekstur (ryc. 21). Ciemniejszy odcień odnosi się do wyższego zalesienia (K. Andrews 2013).

3. Odwzorowania kartograficzne map wielościennech

Większość odwzorowań stosowanych do opracowania map wielościennech to odwzorowania gnomoniczne, lecz B.J.S. Cahill, R.B. Fuller i Laurence P. Lee stosowali odwzorowania konforemne lub specjalnie do tego celu skonstruowane. L.P. Lee (1965) opracował odwzorowania konforemne na ściany wielościanów

z zastosowaniem funkcji eliptycznych. Ta własność zapewnia, że nie ma załamań ani na krawędziach ścian ani na liniach symetrii. Także Amos Day Bradley (1905–1992) i Irving Fisher (1867–1947) opracowali dwie wersje równopoleowego odwzorowania na dwudziestościan (J. Snyder 1993), lecz zamiast użyć 20 równobocznych sferycznych trójkątów Bradley podzielił kulę ziemską na cztery równopolowe strefy, które zostały odwzorowane na trójkąty. Wszystkie wymienione dotychczas odwzorowania posiadały załamania (nieciągłość pierwszej pochodnej) wzdłuż krawędzi ścian wielościanu. Nieopublikowane odwzorowanie I. Fishera także wprowadza załamania wzdłuż linii symetrii ścian. Te załamania odwzorowują się jako punkty kątowe krzywych – obrazów południków i równoleżników (D. van Leeuwen, D. Strebe 2006).

W swoim zmodyfikowanym azymutalnym równopoleowym odwzorowaniu Lamberta dla map wielościennech J. Snyder (1992) zmodyfikował podejście I. Fishera dla nieciągłości między sąsiadującymi nieprzystającymi ścianami. Dla platońskich wielościanów, gdzie nie istnieją nieprzystające sąsiadujące ściany, odwzorowanie J. Snydera jest równoważne odwzorowaniu I. Fishera. Wadami równopoleowego odwzorowania J. Snydera są różnice w skali wzdłuż krawędzi wielościanów i bardziej istotne – poważne załamania pomiędzy powierzchniami wielościanów i wzdłuż ich linii symetrii.



Ryc. 21. Mapa *Dymaxion Woodocean World* (źródło: portal Buckminster Fuller Institute)

D. van Leeuwen i D. Strebe (2006) zaproponowali dwa równopolowe odwzorowania z pewnymi użytecznymi własnościami: jedno ze stałą skalą na krawędziach wielościannu i jedno z bardzo małymi załamaniem linii na krawędziach wielościannów. Aby uzyskać równopolewość odwzorowań zaimplementowano tzw. metodę *slice-and-dice*.

Wśród innych twórców tego typu odwzorowań wymienić warto: Artura Hinksa (1821) autora odwzorowania na sześciann, Jamesa Smitha (1939) oraz Stefanię Gurbę – na dwunastościan i kilku innych na dwudziestościan, F.V. Botley'a (1949, 1954) – na czworościan i ośmiościan, R. Clarka (1977) – na ośmiościan, A.J. Pottera (1925) – na czworościan i Charlesa Burky'ego (1934–1935) – na dwudziestościan ścięty z 32 pięciokątami i sześciokątami (J. Snyder 1993).

D. van Wijk z kolei jest autorem odwzorowań myriahedralnych. Sfera jest odwzorowana na wielościann z dużą liczbą ścian. Następnie wielościann jest rozcinany i rozkładany na płaszczyźnie. Uzyskana mapa ma dużą liczbę cięć, lecz jest prawie konforemna i zachowuje równopolewość. Autor zaprezentował ogólne podejście do poszukiwania miejsc, gdzie dokonać cięć. Zaproponował trzy różne sposoby: z zastosowaniem siatek geograficznych, z użyciem rekurencyjnego dzielenia wielościannu oraz podejście oparte na geografii Ziemi. W tym ostatnim rozwiązaniu zakładamy, że nie będzie się przecinać kontynentów.

Opisane odwzorowania wielościenne Derek Hylton Maling (1992) określił mianem odwzorowań wielopowierzchniowych, a wśród nich najczęściej stosowana jest podgrupa odwzorowań wielognomicznych. Odwzorowania stosowane do map wielościennych złożone są z kilku płaszczyzn obrazu.

4. Odwzorowania wielościenne w GIS

W popularnych programach GIS jedynie ArcGIS firmy ESRI posiada wbudowane funkcje dające możliwość wizualizacji danych z zastosowaniem odwzorowania wielościennego. Za pomocą tego oprogramowania możemy opracować mapę w odwzorowaniu R.B. Fullera. W większości programów GIS istnieje natomiast możliwość opracowania map wielościennych z zastosowaniem odwzorowania gnomonicz-

nego. W dzisiejszych czasach, gdy mamy dostęp do darmowych danych geograficznych oraz programów do tworzenia map, taką wielościenną mapę możemy opracować samodzielnie, np. w QGIS.

Dane można pobrać np. z portalu Natural Earth. Znajdują się tam dane geograficzne, dzięki którym możemy wykonać mapę świata. Natomiast z portalu Wolnego i Otwartego Systemu Informacji Geograficznej można pobrać darmowe oprogramowanie QGIS do tworzenia map i baz danych geograficznych.

W programie QGIS nie ma gotowych rozwiązań pozwalających na wykonanie mapy w odwzorowaniu wielościennym. Można natomiast wykonać taką mapę dzieląc powierzchnię kuli ziemskiej na strefy, poprzez rzutowanie ścian wielościannu na sferę. Następnie należy opracować mapy w odwzorowaniu gnomonicznym ukośnym, osobno dla każdej strefy oraz skleić wykonane fragmenty mapy w jedną całość.

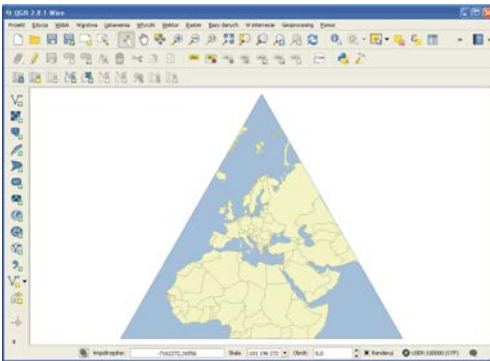
Przykładowo możemy wykonać mapę, w której za powierzchnię obrazu przyjęto ośmiościan foremny, tzn. mapę podobną do mapy B.J.S. Cahilla. Ośmiościan foremny składa się z ośmiu trójkątów równobocznych. Promień sfery wpisanej w ośmiościan foremny wynosi

$$R = a \frac{\sqrt{6}}{6}$$

gdzie a jest długością boku ściany. Należy przyjąć promień sfery równy $R=6371$ km, długość krawędzi ośmiościanu wyniesie $a = 15605,699$ km. Przyjmując za B.J.S. Cahille, że podział sfery na płaty będzie zaczynał się od południka o długości geograficznej $\lambda = 22^{\circ}30'$ a następnie co 90° , otrzymamy osiem stref południkowych (cztery na półkuli północnej i cztery na południowej), o południkach osiowych $\lambda_0 = 22^{\circ}30'$, $112^{\circ}30'$, $-67^{\circ}30'$, $-157^{\circ}30'$. Zastosujemy odwzorowanie kartograficzne gnomoniczne ukośne styczne w punktach o szerokościach geograficznych $35^{\circ}15'52''$ dla stref na półkuli północnej oraz $-35^{\circ}15'52''$ dla stref na półkuli południowej. Zadeklarowane w QGIS parametry odwzorowania przykładowej strefy mają następującą postać:

```
+proj=gnom +lat_0=35.2644444444
+lon_0=22.5 +a=6371000 +b=6371000 +unit=
s=m +no_defs
```

Mapę dla tej strefy wykonaną w QGIS przedstawia rycina 22. Po wykonaniu map ośmiu stref pozostaje jedynie ich odpowiednie obrócenie i posklejanie. Ostateczną postać mapy zaprezentowano na rycinie 23. Opracowana mapa jest ciągłym obrazem całej kuli ziemskiej. Mimo podziału sfery na fragmenty, ma jednak dość znaczne zniekształcenia. Rozkład zniekształceń w jednej ze stref przedstawiono na rycinie 24.



Ryc. 22. Jedna ze stref mapy w odwzorowaniu na ośmiościan foremny

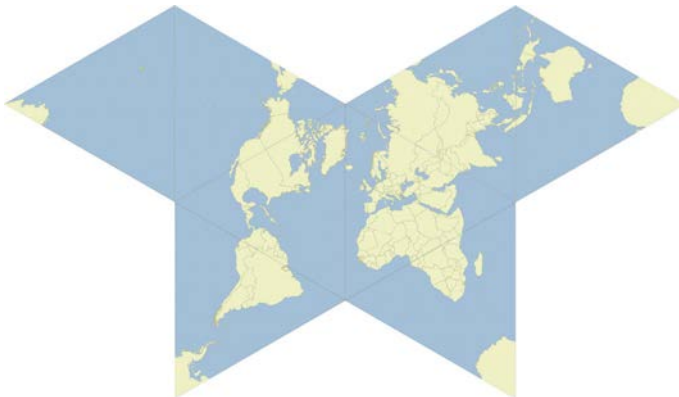
W punkcie głównym występują zerowe zniekształcenia. Największe zniekształcenia występują w wierzchołkach trójkątów: ekstremalne skale długości $m = 1,732048$, $n = 2,999992$, skala zniekształceń pól $p = 5,196131$, zniekształcenia kątowe $\omega = 31^\circ$.

5. Wirtualne globusy wielościenne

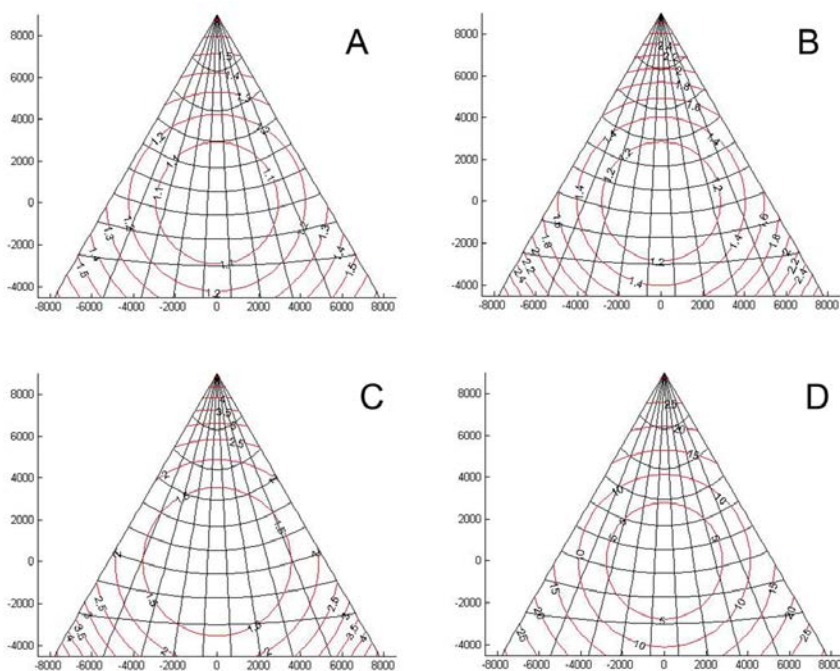
Globusy wielościenne znane są od ponad dwustu lat. W 1803 roku Christian Gottlieb Reichard (1758–1837) opracował globus w kształcenie sześcienu, nazywając go *Erdkubus*. W 1833 roku J.W. Woolgar wprowadził odwzorowanie stereograficzne całego globu ziemskiego na sześciu. Następnie w 1851 roku J.N. Adorno opatentował globus Ziemi w postaci dwudziestościanu, a w 1877 roku J.M. Boorman opatentował szereg wielościennej globusów (J. Snyder 1993).

Również w Polsce wielościenne globusy cieszyły się popularnością. Jako pierwszy zaproponował globusy składane z kartonu Jan Walery Jędrzejewicz (1835–1887). W artykule z 1887 roku opublikował prototyp takiej mapy globusowej (J. Jędrzejewicz 1887). W 1948 roku nakładem wydawnictwa „Przełom” wydana została mapa autorstwa Władysława Milaty (1911–1954) i Wojciecha Walczaka (1916–1984), z której można było złożyć globus. Mapa podzielona była na 20 trójkątów. W 1976 roku w Zakładzie Kartografii Uniwersytetu Marii Curie-Skłodowskiej w Lublinie wydano mapy składanego dwunastościennej globusa (J. Piasecka 2004). Autorami byli pracownicy Zakładu Stefania Gurba (1930–2010) i Franciszek Uhorczak (1902–1981). W kilku artykułach S. Gurba prezentowała zasady opracowania globusa oraz jego wykorzystania, m.in. opisała jak przebiega na nim ortodroma (S. Gurba 1970).

Współcześnie wykonuje się mapy cyfrowe wielościenne oraz globusy wirtualne. Mimo wbudowanych możliwości wizualizacji sfery

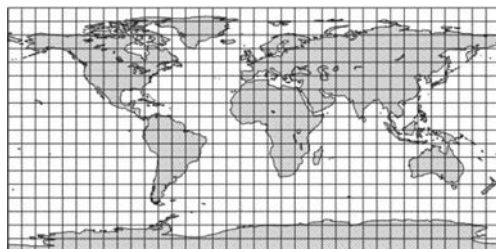


Ryc. 23. Mapa świata na ośmiościanie foremnym



Ryc. 24. Rozkład zniekształceń w odwzorowaniu gnomonicznym jednej ze ścian ośmiościanu foremnego. A – Izolinie ekstremalnych skal zniekształceń długości m ; B – izolinie ekstremalnych skal zniekształceń długości n ; C – izolinie skal zniekształceń pól powierzchni; D – izolinie ekstremalnych zniekształceń kątowych

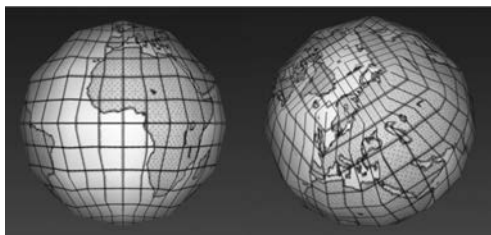
wiele narzędzi do modelowania 3D pozwala opracowywać globusy jedynie w postaci przybliżonej za pomocą wielościannów. Przykładowo w języku VRML (*Virtual Reality Modelling Language*) zredagowanie prostego globusa jest zadaniem bardzo łatwym. Wystarczy opracować mapę w odwzorowaniu walcowym *Plate Carree* (ryc. 25) i nałożyć ją na sferę umieszczoną w wirtualnym świecie, jako węzeł „sphere”.



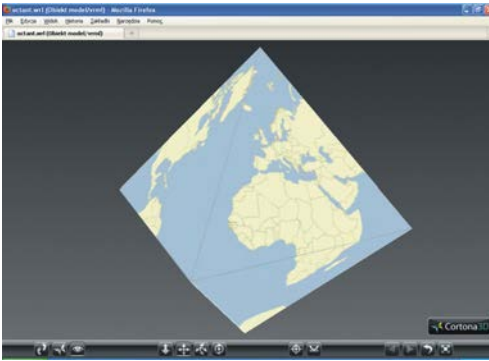
Ryc. 25. Mapa świata w odwzorowaniu *Plate Carree*

Efekt końcowy jednak może nie być zadowalający (ryc. 26). Liczne załamania południków i równoleżników na globusie pokazują, że uzyskany efekt jest daleki od doskonałości. Opracowując wirtualny globus w tym języku należałoby raczej zastosować własną konstrukcję wielościannu oraz mapę opracowaną z zastosowaniem odwzorowania wielościennego.

Wykonanie modelu 3D wielościannu, np. ośmiościanu foremnego z mapą świata można zreali-



Ryc. 26. Wirtualne globusy w VRML



Ryc. 27. Wirtualny ośmiościan foremny z mapą świata

zować samodzielnie. Poniżej zaprezentowano kod źródłowy w języku VRML oraz efekt końcowy w postaci modelu 3D. Aby wykonać wirtualny ośmiościan według poniżej zamieszczonego kodu mapę z ryciny 23 należy zapisać w formacie JPEG w pliku o nazwie cahill.jpg.

```
#VRML V2.0 utf8
Shape {
  appearance Appearance {
    texture ImageTexture { url "cahill.jpg" }
  }
  geometry IndexedFaceSet {
    coord DEF COORD Coordinate {
      point [0 0 1, 0 1 0, -1 0 0, 0 -1 0, 1 0 0, 0 0 -1
      ]
    }
    coordIndex [0 1 2 -1, 0 2 3 -1, 0 3 4 -1, 0 4
    1 -1, 5 2 1 -1, 5 3 2 -1, 5 4 3 -1, 5 1 4 -1 ]
    texCoord DEF TEXCOORD TextureCoordinate {
```

```
point [0.5 0.75, 0.25 1, 0.25 0.5, 0.5
0.25, 0.75 0.5, 0.75 1, 0 0.75, 0.25 0,
0.75 0, 1 0.75]]
texCoordIndex [ 0 1 2 -1, 0 2 3 -1,
0 3 4 -1, 0 4 5 -1, 6 2 1 -1, 7 3 2 -1,
8 4 3 -1, 9 5 4 -1]
}
}
```

W powyższym kodzie możemy wyróżnić dwie zasadnicze części. Pierwsza rozpoczyna się od słów kluczowych *geometry IndexedFaceSet*. Tutaj podano współrzędne wierzchołków wielościanu *coord DEF COORD Coordinate* oraz zdefiniowano, które wierzchołki wielościanu tworzą poszczególne trójkąty. W drugiej części rozpoczynającej się od słów *texCoord DEF TEXCOORD TextureCoordinate* podane są współrzędne punktów podziału wczytanej mapy na trójkąty. Na rycinie 27 zaprezentowano efekt działania powyższego kodu.

W analogiczny sposób możemy opracować wirtualne globusy z zastosowaniem innych wielościanów. Na rycinie 28 przedstawiono mapę świata w odwzorowaniu gnomonicznym na dwunastościan, a na rycinie 29 wirtualny globus opracowany na jej podstawie. Mapę wykonano przyjmując założenia opublikowane w artykule S. Gurby (1970). W analogiczny sposób można tworzyć wielościany zarówno foremne jak i nieforemne. Zwiększanie liczby ścian wielościanów pozwala na uzyskanie powierzchni coraz bardziej zbliżonej do sfery.

6. Podsumowanie

Wielościany znalazły zastosowanie w kartografii do opracowania map przedstawiających

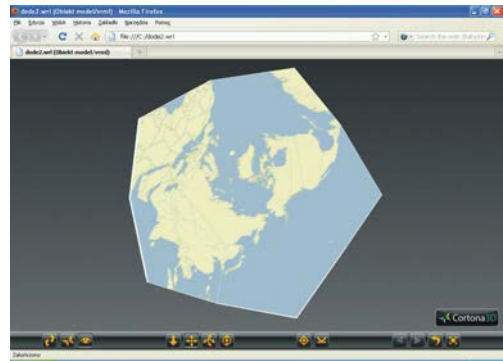


Ryc. 28. Mapa świata na dwunastościanie

łądy w sposób ciągły, z niedużymi zniekształceniami. Mapy wykonane w takich odwzorowaniach lepiej przedstawiają wzajemne relacje pomiędzy poszczególnymi kontynentami niż na przykład stosowane w serwisach internetowych mapy w odwzorowaniu *WebMercator*. Może więc lepszym rozwiązaniem byłoby stosowanie tego typu map niż to „innovacyjne” rozwiązanie zaproponowane przez firmę Google. Mapy wielościenne cieszyły się i nadal cieszą się dużą popularnością, szczególnie wśród architektów i matematyków, którzy często byli twórcami tych map. O popularności map wielościennych może świadczyć również to, że znalazły się one na znaczkach pocztowych (ryc. 30).

Samodzielne wykonanie map oraz globusów na podstawie wielościannów pozwala nie tylko zapoznać się z geografią świata, ale również poznać różne rodzaje wielościannów. Mogą więc znaleźć zastosowanie w dydaktyce. Nie tylko możemy przedstawić obraz kuli ziemskiej na płaszczyźnie, ale także złożyć z takiej mapy wielościann.

Globusy w postaci wielościannów są łatwe w konstrukcji i mogą być sklepane właściwie przez każdego. W przeciwieństwie do globusów sferycznych, których skonstruowanie wymaga dużej wiedzy oraz zachowania wysokiej dokładności. W Internecie można znaleźć siatki wielościannów, na które odwzorowano powierzchnię Ziemi oraz innych planet. Przykładowo na

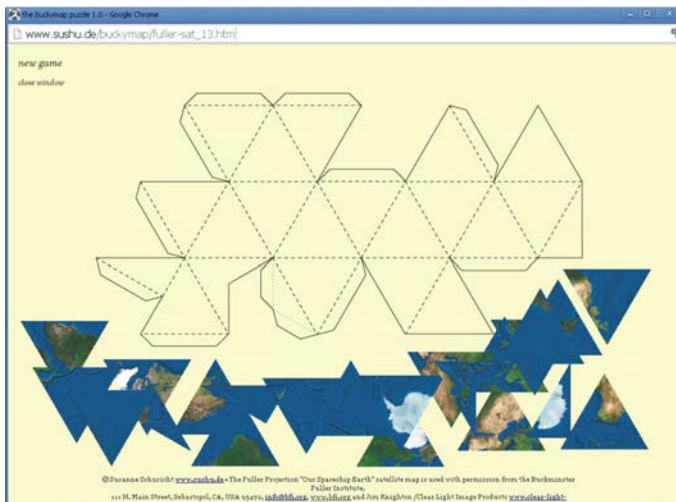


Ryc. 29. Wirtualny dwunastościan foremny z mapą świata



Ryc. 30. Mapy wielościenne na znaczkach pocztowych (źródło: portal geo-mexico)

stronie Progonos.com znajdują się gotowe do wydruku siatki wielościannów z mapami powierzchni globu ziemskiego. Godny polecenia jest także portal Views of the Solar System,



Ryc. 31. Układanka z mapą świata na dwudziestościanie foremnym (źródło: S. Schuricht 2001)

gdzie zamieszczono siatki planet i księżyców znajdujących się w układzie słonecznym.

Z innych interesujących opracowań na temat wielościennych map warto wymienić układankę zamieszczoną na stronie Susanne Schuricht (2001). Zastosowano w niej odwzorowanie powierzchni Ziemi na dwudziestościan (ryc. 31).

Literatura

- Andrews K., 2013, *Buckminster Fuller's Dymaxion world map redesigned*, <http://www.dezeen.com/2013/08/07/buckminster-fuller-dymaxion-world-map-re-imagined/> (dostęp: 10.11.2016).
- Cahill B.J.S., 1909, *An account of a new land map of the World*. „The Scottish Geographical Magazine” no. 09, s. 449–469.
- Catalan M.E., 1865, *Memoire sur la theorie des polyedres*. „Journal de l'Ecole Polytechnique” Vol. 24, s. 25–71.
- Copleston F., 1998, *Historia filozofii*. Warszawa.
- D'Andrea J., 2011, *Fundamental transversals on the complexes of polyhedra*. A thesis for the degree of Master of Arts, Department of Mathematics, College of Arts and Sciences, University of South Florida <http://scholarcommons.usf.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=4941&context=etd>.
- Doroziński T., Pogoda Z., 2009, *Wielościanny Catalana*. „Delta” nr 12, s. 1–3, <http://mimuw.edu.pl/delta/artykuly/delta1209/20091201-wieloscianny.pdf> (access: 10.11.2016).
- Flynn D., 2014, *Emirates route map puts Dubai at the centre of the world*. <http://www.ausbt.com.au/emirates-new-route-map-puts-dubai-at-the-centre-of-the-world> (dostęp: 10.11.2016).
- Fuller R.B., 1943, *Life presents R. Buckminster Fuller's Dymaxion World*. „LIFE” Vol. 14, no. 9, s. 41–55.
- Gurba S., 1970, *Ortoforma na globusie dwunastościennym*. „Polski Przegląd Kartograficzny” T. 2, nr 4, s. 160–168.
- Hart G.W., 1999, *Leonardo da Vinci's polyhedra*. Virtual Polyhedra, <http://www.georgehart.com/virtual-polyhedra/leonardo.html> (dostęp: 10.11.2016).
- Heinz A., 2008, *Development of mathematical imagination of 3-dimensional polyhedra throughout history and inversion phenomena*. 13th International Conference on Geometry and Graphics, 4–10.08.2008, Dresden.
- Jędrzejewicz J., 1887, *Globus składany*. „Wszeczeński” T. 6, nr 27, s. 427.
- Kepler J., 1619, *Harmonices Mundi*, http://posner.library.cmu.edu/Posner/books/book.cgi?call=520_K38PI (dostęp: 10.11.2016).
- Lee P.L., 1965, *Some conformal projections based on elliptic functions*. „Geographical Review” Vol. 55, no. 4, pp. 563–580.
- Maling D.H. 1992, *Coordinate systems and map projections*. Exeter: Pergamon Press.
- Piasecka J., 2004, *Polskie globusy Ziemi z XIX i XX wieku*. Lublin: Wydawnictwo Uniwersytetu Marii Curie-Skłodowskiej.
- Schuricht S., 2001, *Exhibition of the buckymap puzzle at Buckminster Fuller – Your Private Sky exhibition, Bauhaus Dessau, Germany*, http://www.sushu.de/buckymap/fuller-sat_13.htm (dostęp: 10.11.2016).
- Szurek M., 2000, *Matematyka dla humanistów*. Warszawa: Wydawn. RTW.
- Snyder J., 1993, *Flattening the earth. Two thousand years of map projections*. Chicago: University of Chicago Press.
- van Leeuwen D., Strebe D., 2006, *A “Slice-and-Dice” approach to area equivalence in polyhedral map projections*. „Cartography and Geographic Information Science” Vol. 33, no. 4, s. 269–286.
- van Wijk J., 2008, *Unfooling the Earth: Myriahedral projections*. „The Cartographic Journal” Vol. 45, no. 1, s. 32–42.

Źródła internetowe (dostęp: 10.11.2016)

- BRL Antique Maps Inc, <https://www.raremaps.com/gallery/enlarge/40688>
- Buckminster Fuller Institute, <http://bfi.org/about-bfi/what-we-do/exhibitions/dymax-redux>
- Department of Mathematics, New York University, <http://forum.swietageometria.info/index.php?topic=1458.0>
- geo-mexico.com
- Gene Keynes Website: <http://www.genekeyes.com/CAHILL-1909/Cahill-1909.html>
- http://www.genekeyes.com/CAHILL_GALLERY/1934-Cahill-3-in-1.html
- <http://www.genekeyes.com/Cahill-desk-maps/3-Cahill-desk-maps.html>
- <http://www.genekeyes.com/WATERMAN-REVIEW/Waterman-review.html>
- <http://geoawesomeness.com/wp-content/uploads/2013/12/hiddenmeanings1.jpg>
- http://www.math.nyu.edu/~crrors/Archimedes/Solids/solidpngs/Kepler_0073-0074.png
- Natural Earth, <http://www.naturalearthdata.com/downloads/110m-physical-vectors/>
- New York Times, http://www.nytimes.com/interactive/2011/12/06/science/1206-world.html?_r=0

Nullschool.net serwis, <http://earth.nullschool.net/#current/wind/surface/level/waterman>
ODT, <http://www.odt.org/Pictures/mappamun.jpg>
Prognos.com, [http://www.progonos.com/furuti/Map-
Proj/Dither/ProjPoly/Foldout/foldout.html](http://www.progonos.com/furuti/Map-Proj/Dither/ProjPoly/Foldout/foldout.html), <http://www.qgis.org/pl/site/>
Views of the Solar System, <http://solarviews.com/>

[http://waaaat.welovead.com/en/top/
detail/51cEgmtB.html](http://waaaat.welovead.com/en/top/detail/51cEgmtB.html)
Wikipedia: [https://upload.wikimedia.org/wikipedia/
commons/1/18/D%C3%BCrer_Melancholia_I.jpg](https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/1/18/D%C3%BCrer_Melancholia_I.jpg)
[http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/d/
db/Duerer_Underweysung_der_Messung_144.
jpg](http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/d/db/Duerer_Underweysung_der_Messung_144.jpg)

Image of the World on polyhedral maps and globes

Summary

Application of polyhedrons as image surface in cartographic projections has a tradition of more than 200 years. The first maps relying on polyhedrons appeared in the 19th century. One of the first maps which based on an original polyhedral projection using a regular octahedron was constructed by the Californian architect Bernard Cahill in 1909. Other well known polyhedral projections and maps included Buckminster Fuller's projection and map into icosahedron from 1954 and S. Waterman's projection into truncated octahedron from 1996, which resulted in the "butterfly" map. Polyhedrons as image surface have the advantage of allowing a continuous image

of continents of the Earth with low projection distortion. Such maps can be used for many purposes, such as presentation of tectonic plates or geographic discoveries.

The article presents most well known polyhedral maps, describes cartographic projections applied in their preparation, as well as contemporary examples of polyhedral maps. The method of preparation of a polyhedral map and a virtual polyhedral globe is also presented.

Keywords: polyhedral maps, virtual polyhedral globes, cartographic projections, polyhedrons

Niniejszy tekst jest polską wersją artykułu: Paweł Pędzich, *Image of the World on polyhedral maps and globes*. „Polish Cartographical Review” Vol. 48, 2016, no. 4, pp. 197–210, DOI: 10.1515/pcr-2016-0014.

W przypadku cytowania należy podawać wersję pierwotną (w języku angielskim).