

PIOTR WERNER
Pracownia Edukacji Komputerowej
Wydział Geografii i Studiów Regionalnych UW

Jeszcze o interpretacji typogramu F. Uhorczaka jako narzędzia prezentacji i typologii zjawisk wielocechowych

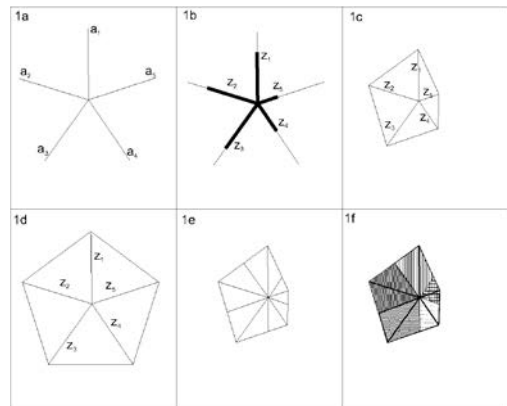
Zarys treści. W artykule przedstawiono propozycję matematycznej i numerycznej interpretacji kartotypogramów Franciszka Uhorczaka, uzupełniając ją no-wymi możliwościami analitycznymi. Zaprezentowany algorytm metody oraz graficzne przedstawienie w postaci wykresu zbiorczego jest oryginalnym, autorskim opracowaniem.

Typogramy F. Uhorczaka stosowane są do prezentacji zjawisk wielocechowych, stanowiących pewną całość. Każda z cech ma określony udział, wyrażony liczbowo, w rozpatrywanej całości. Założenia metody były już wielokrotnie opisywane i dyskutowane (F. Uhorczak, J. Ostrowski 1972, L. Ratajski 1989), ale sam typogram jest stosowany coraz rzadziej. Do prezentacji zjawisk wielocechowych charakteryzujących się pewną strukturą wybierane są częściej strukturalne diagramy kołowe lub ich odmiany, a samą typologię definiuje się za pomocą narzędzi statystycznych, zwłaszcza przy łatwej dostępności oprogramowania komputerowego. Przyczyną może być powszechna nieznanomość metody, zwłaszcza w przypadku kartotypogramów, jak również wyrażane opinie, że typogram nie określa w sposób jednoznaczny typu (J. Szewczuk 1987) oraz, że zasady jego konstrukcji nie wiążą w sposób matematyczny jednoznacznie typu ze znakiem graficznym (typogramem). Natomiast jedną z intuicyjnie zrozumiałych cech typogramu, nawet dla laika, jest fakt, że typogram jako znak graficzny przyjmuje postać nieregularnego wieloboku lub nieforemnego wielokąta odzwierciedlającego na osiach wielkość udziału poszczególnych cech w całości badanego zjawiska. Główna krytyka koncentruje się na fakcie, że:

„Konstrukcja graficzna typogramu Uhorczaka, wzorowana częściowo na ekonogramie, również nie jest wykresem, lecz diagramem wieloparametrowym. Typogram nie ilustruje sobą wykresu funkcji, zależności badanych cech. Odcinki łączące końce promieni na sąsiadujących osiach liczbowych w typogramie nie są obrazem geometrycznej interpretacji jakiegokolwiek zależności. Są jedynie sztucznym tworem, uzupełnieniem całej konstrukcji. (...) Przedstawienie samych promieni wzdłuż osi liczbowych jest mało wymowną ilustracją badanych cech. (...)” (J. Szewczuk 1987, s. 162)

W cytowanym artykule dowodzone również braku prostej proporcjonalności między powierzchnią sektora (części typogramu) a wartością obrazowanej cechy. Krytyka dotyczyła zarówno strukturalnych, jak i wagowych typogramów Uhorczaka. Na rycinie 1 pokazano poszczególne

etapy konstrukcji typogramu Uhorczaka:



Ryc. 1. Etapy konstrukcji typogramu Uhorczaka:
a – wyznaczenie osi liczbowych,
b – oznaczenie promieni z_i na osiach,
c – utworzenie wieloboku,
d – przykład wieloboku regularnego ($z_i = \text{const}$),
e – podział wieloboku na sektory,
f – wyróżnienie sektorów deseniem (lub kolorem)
(wg J. Szewczuka, 1987)

Fig. 1. Construction stages of the Uhorczak's Typogram:
a – selection of axes,
b – designation of z_i radii on axis
c – creation of a polygon
d – example of a regular polygon ($z_i = \text{const}$),
e – division of a polygon into sectors
f – designation of sectors with value (or color)
(after J. Szewczuk, 1987)

etapy konstrukcji typogramu.

Proponowana w niniejszym artykule interpretacja typogramu Franciszka Uhorczaka oraz kartotypogramów (map przedstawiających zjawiska wielocechowe w postaci typogramów) nie zmienia nic w samej istocie konstrukcji geometrycznej diagramu. Jest tylko propozycją innego spojrzenia na nie, sformułowaniem pewnych zależności matematycznych oraz próbą sfalsyfikowania

wypowiadanych dotąd opinii.

Nic nie stoi na przeszkodzie, aby odcinki, które przedstawione są na rycinie 1b jako pogrubione potraktować geometrycznie jako wektory na płaszczyźnie, zaczepione w jednym punkcie (w środku całego układu – rycina 2a). Oczywiście utrzymane zostają proporcje długości wektorów do udziału danej cechy w całości przedstawianego zjawiska tak, aby konstrukcja typogramu została zachowana. W tym momencie równocześnie ustalone zostaje stałe sąsiedztwo poszczególnych osi typogramu odpowiadających poszczególnym cechom, które w dalszym toku postępowania nie będzie już zmieniane. Ten etap postępowania w metodzie jest subiektywny i zależy wyłącznie od badacza.

Jest to kartezjański układ współrzędnych na płaszczyźnie, zawierający wersory osi (wektory jednostkowe). Wersorami osi są odcinki (jednakowe dla osi X i Y), każdy o długości odpowiadającej całości przedstawianego zjawiska. Cały typogram mieści się całkowicie wewnątrz okręgu o promieniu jednostkowym. Logicznym odpowiednikiem prezentowanego zjawiska jest suma kolejnych wektorów. Tak więc poszukując wzoru matematycznego strukturalnego typogramu Uhorczaka, można napisać:

$$\bar{T} = \sum_{i=1}^n r_i e^{j \frac{2\delta_i}{n}} \quad (1)$$

gdzie:

T – wektor sumy (odpowiadający określonej kształtowi typogramu)

n – liczba cech typogramu; $n > 2$ (w tabeli da-

Ryc. 2. Interpretacja typogramu Uhorczaka jako wektorów zaczepionych w środku układu współrzędnych kartezjańskich

a – Przedstawienie typogramu Uhorczaka w postaci układu wektorów zaczepionych w środku układu współrzędnych XY

b – Geometryczna interpretacja typogramu do obliczenia sumy wektorów – na rysunku: dwóch pierwszych składowych ($z_1 + z_2$)

c – Geometryczna interpretacja typogramu – suma wszystkich

wektorów = $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + z_5$

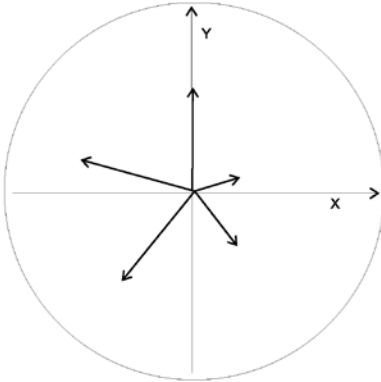
Fig. 2. The Interpretation of Uhorczak's Typograms as vectors originating from the center of the Cartesian coordinate system

a – The Interpretation of Uhorczak's Typograms as a system of vectors originating from the center of the XY coordinate system

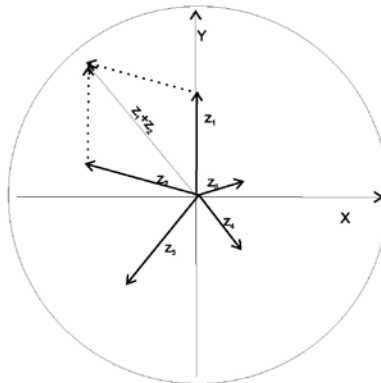
b – Geometric interpretation of the Typogram: the calculation of the sum of vectors – in figure: first two components ($z_1 + z_2$)

c – Geometric interpretation of the Typogram – the sum of all components = $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + z_5$

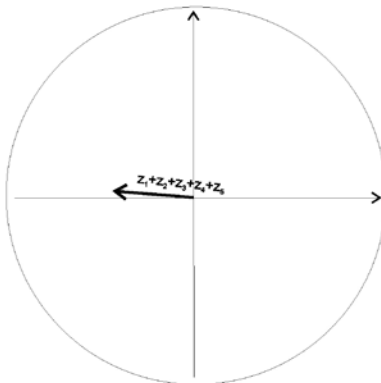
2a



2b



2c



nych wyjściowych dla typogramu oznacza liczbę kolumn)

- r_i – wartość udziału danej cechy zjawiska;
- $0 = r = 1$ lub $0\% = r\% = 100\%$
- j – oznaczenie jednostki urojonej liczby zespolonej
- $i = 1, 2, 3, 4, \dots$

Sens matematyczny sprowadza się do interpretacji poszczególnych wektorów jako kolejnych liczb zespolonych. Jeżeli długość r_i jednej z osi typogramu (jedną cechę) potraktujemy jako moduł liczby zespolonej (wektor wodzący), to całą liczbę zespoloną odpowiadającą danej cesze typogramu można przedstawić w postaci wykładniczej (wg wzoru Eulera) $r_i e^{j\beta}$. Kąt $j = (2\pi/n)i$ dla każdej kolejnej cechy.

Analogicznie dla wagowego typogramu Uhorczaka:

$$T = \sum_{i=1}^n \left(\frac{r_i}{\sum_{k=1}^m r_k} \right) e^{j \frac{2\delta}{n} i} \quad (2)$$

gdzie:

- m – liczba obserwacji w całej zbiorowości (w tabeli danych odpowiada liczbie wierszy); $m = 1, 2, \dots$
- a – pozostałe oznaczenia są takie same jak we wzorze (1).

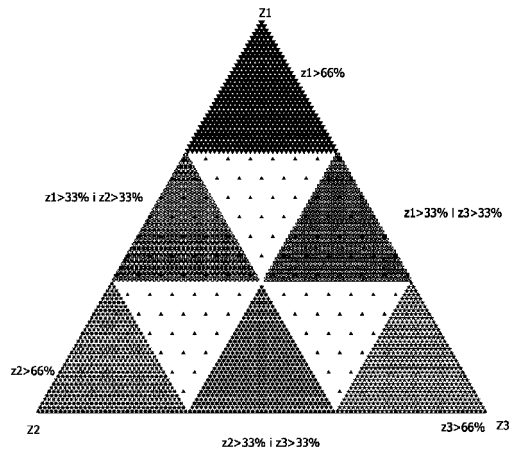
Wyliczony w ten sposób wektor sumy nie zależy od kolejności sumowania poszczególnych składników (zgodnie z regułą przemienności dodawania, która obowiązuje w ciele liczb zespolonych) przy założonym (uprzednio) z góry rozkładzie (sąsiedztwie) cech.

Z uwagi na fakt, że typogram Uhorczaka zobrazowany na płaszczyźnie ma więcej niż dwie cechy, wektory tworzą zależną kombinację liniową. Równanie jest więc często nierozwiązywalne. Ponieważ obie funkcje są ciągłe w swojej dziedzinie $\langle 0, 1 \rangle$, można po prostu zastosować „brutalną siłę” i narysować ich wykres, wykorzystując technikę komputerową i wyliczone wartości funkcji (ryciny 3, 4, 5, 6, 7).

Obliczenia wykonano (dla typogramów strukturalnych) w programie MS Excel, wykorzystując własną aplikację (VBA)¹. Jedyną modyfikacją dotyczyła faktu, że pierwsza oś (cecha) uzyskanych wykresów pokrywałaby się z osią X, dlatego przy obliczaniu wartości kątów w radianach zastosowano obrót o kąt dopełniający do 90° według następującego wzoru:

$$T = \sum_{i=1}^n r_i e^{j \left(\frac{2\delta}{n} \right) i + \left(\frac{\delta}{2} - \frac{2\delta}{n} \right)} \quad (3)$$

tak, aby pierwsza oś (pierwsza cecha typogramu) pokrywała się z osią Y. Program oblicza dla każdej cechy typogramu współrzędne w układzie kartezjańskim w dziedzinie $\langle 0, 1 \rangle$ i przeciwdziedzinie $\langle 0, 1 \rangle$ oraz te same współrzędne dla wektora sumy. Ponieważ inną interpretacją liczb zespolonych są punkty na płaszczyźnie – na wykresach przedstawiono jedynie punkty odpowiadające końcom wektorów sum. Każdemu punktowi na wykresie odpowiada więc jednoznacznie określony kształt typogramu Uhorczaka (przy stałej liczbie cech). Kolejne wykresy przedstawiają typogramy o 3, 4, 5, 6 i 7 osiach. Dla uzyskania argumentów funkcji wygenerowano ciągi 3-, 4-, 5-, 6- i 7-elementowe liczb całkowitych (r_i) z przedziału $\langle 0, 1 \rangle$, kombinacje z powtórzeniami takie, że pokrywają całą dziedzinę, nakładając jedynie ograniczenie, aby suma elementów każdej kombinacji równa była 100%. Elementy ciągów różnią się o wielokrotność liczby 1 dla trójkątnych i o wielokrotność liczby 5 dla czworokątnych typogramów wektorowych oraz liczby 10 – dla pozostałych. Dla trójkąta było to 5151 ciągów trójek, dla kwadratu – 1771 czwórek, dla



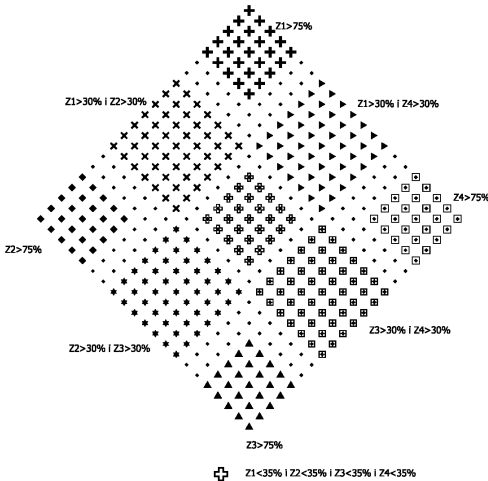
Ryc. 3. Wykres funkcji trójkątnego typogramu wektorowego. Każdy punkt na wykresie odpowiada określonemu kształtowi typogramu Uhorczaka. Punkty pogrupowano wg dominującej cechy (jednej lub więcej cech). Wyraźne jest podobieństwo do wykresu trójkąta Ossana

Fig. 3. A diagram of functions of the triangular vector typogram. Each point on the diagram represents a unique shape of a Uhorczak's Typogram. Points have been classed according to the dominant feature (one or more). The similarity to the Ossan's Triangle is evident

¹ Program jest dostępny w Internecie pod adresem: <ftp://www.wgstr.uw.edu.pl/pub/typogram/typogram.xls>

pięciokąta – 1001 piątek, sześciokąta – 3003 szóstek i siedmiokąta – 8008 siódemek liczb.

Wykresy zbiorcze przybierają kształt wielokątów foremnych (trójkąta równobocznego, kwadratu, pięciokąta foremnego itp.). Każdy punkt na wykresie odpowiada konkretnemu kształtowi typo-



Ryc. 4. Interpretacja wykresu czworokątnego typogramu wektorowego. Każdy punkt na wykresie odpowiada określonemu kształtowi typogramu Uhorczaka. Punkty pogrupowano wg dominującej cechy (jednej lub więcej cech)

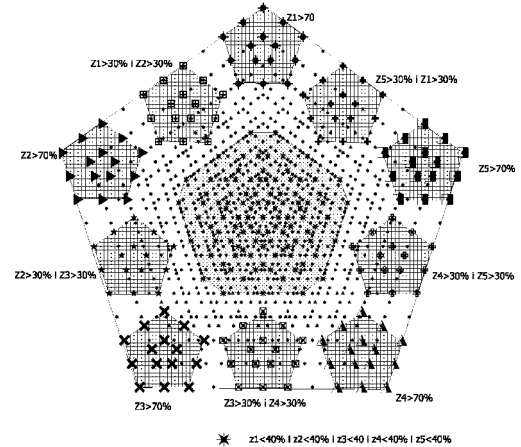
Fig. 4. Interpretation of the diagram of a square vector typogram. Each point on the diagram represents a unique shape of a Uhorczak's Typogram. Points have been classed according to the dominant feature (one or more)

gramu przy przyjętej uprzednio kolejności cech oznaczonych na osiach. Zasada interpretacji jest następująca: im punkt położony jest bliżej wierzchołków, tym większa jest przewaga danej cechy w typogramie. Z kolei im punkt położony jest bliżej środka, tym bardziej kształt danego typogramu jest zbliżony do foremnego (przy założeniu różnowartościowości liczb r_i w każdym ciągu). Próby interpretacji kolejnych wykresów dokonano wyodrębniając grupy punktów o zadanych wartościach osi typogramów Uhorczaka.

Wzajemną jednoznaczność wszystkich punktów typogramu wektorowego i odpowiadających im kształtom typogramów Uhorczaka można udowodnić jedynie dla trójkąta foremnego, rozwiązując układ trzech równań z trzema niewiadomymi. Dla wykresów o większej liczbie cech, zasada wzajemnej jednoznaczności jest określona (tzn. można udowodnić rozwiązywalność układu równań) jedynie dla określonych sytuacji, np. dla punktów położonych w wierzchołkach wielokąta

lub w sytuacji, gdy wszystkie składowe są większe od zera i różnowartościowe.

O określonemu typie świadczy więc położenie punktu na wykresie zbiorczym odpowiadające określonemu kształtowi typogramu Uhorczaka, przy założonym uprzednio z góry sąsiedztwie



Ryc. 5. Interpretacja wykresu pięciokątnego typogramu wektorowego. Każdy punkt na wykresie odpowiada określonemu kształtowi pięciokątnego typogramu Uhorczaka. Punkty pogrupowano wg dominującej cechy (jednej lub więcej cech)

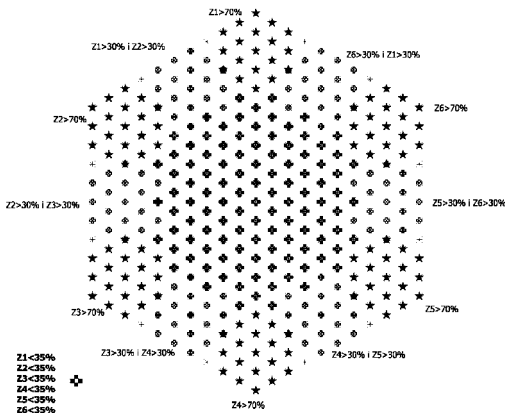
Fig. 5. Interpretation of the diagram of a pentagonal vector typogram. Each point on the diagram represents a unique shape of a Uhorczak's Typogram. Points have been classed according to the dominant feature (one or more)

cech, natomiast nie zależy zupełnie od kolejności sumowania. Dodatkową zaletą wykresu zbiorczego jest oczywiście fakt, że można przedstawić na nim dane dla różnych okresów. Oprócz wizualnej prezentacji typologii, na podstawie wykresu zbiorczego można dokonać pogrupowania jednostek przestrzennych, wyodrębniając klasy odpowiadające poszczególnym typogramom Uhorczaka, lub statystycznie – budując macierz odległości euklidesowych między nimi. Należy podkreślić, że kształty typogramów (i sumy wektorów) stają się odzwierciedleniem typu, przy założeniu niezmienności układu osi, identycznego z wykresem zbiorczym i zbiorem kartotypogramów.

Tak więc wydaje się, że teza o słabości typogramu Uhorczaka jako narzędzia typologicznego została w pewnej mierze podważona. Natomiast wydaje się celowe uzupełnienie kartotypogramów (map przedstawiających wielocechowe, strukturalne zjawiska w postaci typogramów) wykresem zbiorczym. Proponowaną nazwą dla tego wykresu jest typogram wektorowy (P. Werner 1997).

Wizualna analiza kartotypogramów na mapie może być dostatecznym narzędziem interpretacji

i wyodrębniania poszczególnych typów zjawisk wielocechowych w układzie jednostek geograficznych. Ma jednak ograniczoną funkcjonalność zależną od ich liczebności i jest subiektywna. Mapa przedstawiająca zbiór kartotypogramów i równocześnie typogram wektorowy (wykres



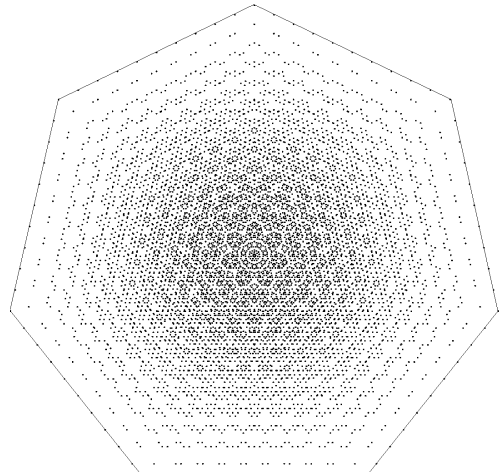
Ryc. 6. Interpretacja wykresu sześciokątnego typogramu wektorowego. Każdy punkt na wykresie odpowiada określonemu kształtowi sześciokątnego typogramu Uhorczaka. Punkty pogrupowano wg dominującej cechy (jednej lub więcej cech)

Fig. 6. Interpretation of the diagram of a hexagonal vector typogram. Each point on the diagram represents a unique shape of a Uhorczak's Typogram. Points have been classed according to the dominant feature (one or more)

zbiorczy) wydaje się bardziej precyzyjnym narzędziem analizy i dodatkowo nie ma ograniczenia górnego co do liczby cech analizowanego zjawiska. W przypadku, gdy jest ich więcej, a badany obszar obejmuje dużą liczbę małych jednostek geograficznych (gminy, powiaty, mikro- lub mezoregiony fizycznogeograficzne), rozwiązaniem mogłoby być przedstawienie wykresu zbiorczego (typogramu wektorowego), przypisanie określonej barwy poszczególnym jego częściom i odpowiednie przedstawienie na mapie.

Sam typogram wektorowy może być traktowany jako syntetyczna prezentacja i jednocześnie wymierne narzędzie analityczne, jakkolwiek w tym zakresie jego wartość trudno jeszcze ocenić. Próby dokonywane przez autora dla zbioru

państw Europy (na zbiorze cech dotyczących struktury pozyskiwanych i zużywanych nośników energii) oraz starego i nowego podziału administracyjnego Polski na województwa (dla struktury zatrudnienia) pokazują wysoką korelację między macierzą odległości euklidesowych poszcze-



Ryc. 7. Rozmieszczenie punktów odpowiadających siedmiokątnym typogramom Uhorczaka w typogramie wektorowym, odpowiadające wszystkim kombinacjom wartości zbiorów siedmioelementowych, gdzie każdy wyraz jest wielokrotnością liczby 10

Fig. 7. Distribution of points corresponding to the heptagonal Uhorczak's Typograms in vector Typograms, corresponding to all combinations of values of seven-element sets, in which each element a multiple of 10

gólnych punktów (odpowiadających państwom lub województwom) na podstawie typogramu wektorowego a podobną macierzą odległości euklidesowych między jednostkami geograficznymi obliczoną dla statystycznej n -wymiarowej przestrzeni cech.

Nie udowodniona pozostaje nadal teza, że wykres zbiorczy o takiej konstrukcji jest częścią płaszczyzny w n -wymiarowej przestrzeni ($n > 2$), przecinającą osie układu współrzędnych pod tym samym kątem i stanowiący rzutnię dla n -wymiarowych wektorów o długości odpowiadającej poszczególnym udziałom badanego zjawiska.

Literatura

- Ratajski L., 1989, *Metodyka kartografii społeczno-gospodarczej*. Warszawa: PPWK.
 Szewczuk J., 1987, *Analiza metodyczna typogramu F. Uhorczaka*. „Polski Przegl. Kartogr.” T. 19, nr 4, s. 157–168.
 Werner P., 1997, *Zmiany struktur systemów ener-*

- getycznych krajów Unii Europejskiej 1979–1992*. Warszawa: Wydawn. WGiSR UW.
 Uhorczak F., Ostrowski J., 1972, *Typogram F. Uhorczaka jako środek graficznej prezentacji zjawisk wielocechowych*. „Polski Przegl. Kartogr.” T. 4, nr 4, s. 145–150.

Recenzował dr hab. Jerzy Mościbroda

A few remarks on the interpretation of Uhorczak's Typograms as tools for presentation and typology of multi-role phenomena

Summary

F. Uhorczak's Typograms are used to present multi-character phenomena. The typogram alone is used less and often. Structural graduated symbols and their modifications are used instead, whereas the typology is most often presented using typical statistical tools, thanks to the readily available software packages. An important feature of a Typogram (which is almost intuitively understood even by a nonspecialists) is the fact that Typograms have the graphic form of an irregular polygon, each axis of which presents the share of each phenomenon in the whole feature.

The proposed interpretation of the Uhorczak's Typograms and other cartotypograms does not alter their geometric construction. It should rather be understood as an attempt to formulate certain mathematical relations as well as an attempt to falsify certain opinions on this graph.

A sum of consecutive vectors can be considered

as a logical equivalent of a phenomenon presented with a Typogram. Therefore, the formula (1) can be considered as a mathematical formula for the structural Uhorczak's Typogram. Graphic representation of a set of (Carto-) Typograms can be presented as cumulative graphs in the form of regular polygons (equilateral triangle, square, regular pentagon). Each point on a graph represents a unique shape of a Typograms. The interpretation rule is as follows: the closer to the vertex the point is, the more regular the shape of the Typogram. The proposed name for the cumulative graph is the Vector Typogram (Werner 1997). This graph seems to be a valuable tool for representation of structural phenomena, and it would also allow to perform a numerical analysis, which is a good complement to the method of Uhorczak's Typograms.

Translated by M. Okonek

Ещё о интерпретации типограмм Ф. Ухорчака как орудия изображения и типологии явлений со многими свойствами

Резюме

Типограммы Ф. Ухорчака (1902–1981) применяются для изображения явлений со многими свойствами, объединяющимися в некоторое целое. Сама типограмма применяется всё реже. Для изображения явлений со многими свойствами, характеризующихся некоторой структурой, выбирают чаще структурные круговые диаграммы или их разновидности, а самую типологию определяют с помощью статистических инструментов, особенно при легкой доступности компьютерного программного обеспечения. Одним из интуитивно понятных свойств типограммы даже для дилетанта является факт, что типограмма, как графический знак, принимает вид неправильного многогранника или бес-форменного многоугольника, отражающего на отдельных осях величину доли отдельных свойств в совокупности исследуемого явления.

Предлагаемая интерпретация типограммы Францишка Ухорчака, а также картотипограммы, не меняет ничего в самой сущности геометрической конструкции диаграммы. Является лишь предложением иного взгляда на них, формулировкой некоторых математических зависимостей, а также попыткой пересмотра высказываемых до сих пор мнений.

Логическим эквивалентом явления изображаемого представляемого в виде типограммы является сумма очередных векторов. Таким образом, разыскивая математическую формулу структурной типограммы Ухорчака, можно написать уравнение 1. Графическое изображение множества (карто) типограмм изображено в виде сводных графиков, приобретающих вид правильных многоугольников (равностороннего треугольника, квадрата, правильного пятиугольника и т.п.). Каждый пункт на графике отвечает однозначно конкретной форме типограммы. Принцип интерпретации следующий: чем ближе пункт расположен к вершинам, тем больший перевес данного свойства в типограмме. В свою очередь, чем ближе пункт расположен середины, тем более форма данной типограммы ближе правильной. Такой сводный график предложено было назвать векторной типограммой (P. Werner 1997). График кажется быть полезным инструментом изображения структурных явлений и даёт возможность цифрового анализа, дополняя метод картотипограмм Францишка Ухорчака.

Перевод Р. Толстикова

